Triangoli

Un **triangolo** è un poligono formato da tre lati.

Rappresenta la più semplice figura piana formata dal minimo numero di lati utili a chiudere una superficie piana.

> Teorema
>
> *In ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.*

Dati tre segmenti qualsiasi (a, b, c) è possibile costruire un triangolo solo se la lunghezza di ciascuno è minore della somma degli altri due.

Si ottiene un triangolo, quindi, se e solamente se le tre seguenti condizioni sono tutte soddisfatte.

$a < b + c \;\; AND \; b < a + c \;\; AND \;\; c < a + b$

Il triangolo è una figura indeformabile ed è l'unico poligono che è sempre circoscrivibile a una circonferenza e in cui è sempre inscrivibile una circonferenza.

> Teorema
>
> *In ogni triangolo ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti.*

La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto (180°).

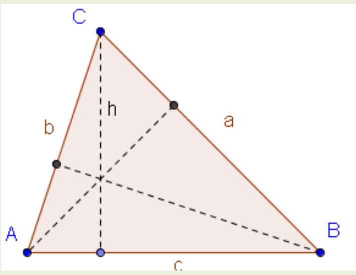
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

La somma degli angoli esterni di un triangolo è sempre un angolo giro (360°).

Almeno due angoli interni sono acuti (non è possibile che un triangolo abbia più di un angolo interno retto o ottuso).

Un angolo retto può essere presente soltanto in un triangolo isoscele o in un triangolo scaleno, ma mai in un triangolo equilatero.

Ciascun angolo esterno è in un triangolo uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti.

	$2p = a + b + c$
	$A = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{b \cdot h}{2}$
	$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ $p = \frac{2p}{2} = \frac{a+b+c}{2} \quad (semiperimetro)$

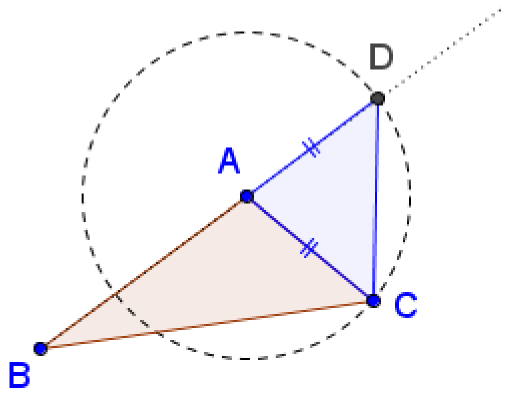
Costruibilità

Teorema

In ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

Dato un triangolo ABC si ha come tesi.

BC < AB + AC
AB > BC – AC

Si prolunghi il lato AB di un segmento AD in modo che AD aggiunto sia uguale ad AC ($AD \cong AC$). Il triangolo ADC è isoscele, avendo i lati AD e AC uguali per costruzione e gli angoli in C e in D alla base congruenti ($C\hat{} \cong D\hat{}$).	

Nel triangolo BCD si ha che il triangolo BCD è maggiore di BDC ($BCD > BDC$) per cui $BD > BC$ ovvero $BC < BA + AD$ e $BC < BA + AC$.

Per la seconda parte della tesi si sottrae ad ambedue i membri della disuguaglianza il segmento AC si ottiene $AB < DC - AC$.

Occorre controllare, infatti, la condizione di costruibilità per ogni lato.

Non esiste se il lato a è maggiore o uguale (>= tradotto dal sistema in ≥) a $b + c$, "o" (|| operatore logico or tradotto dal sistema in ∨) se il lato b è maggiore di $a + c$, "o" se il lato c è maggiore "o" uguale a $b + a$.

Ne segue la seguente definizione di triangolo degenere.

*Un triangolo è **degenere** quando un lato misura quanto la somma degli altri due e si riduce a un segmento.*

*Un triangolo è **degenere** quando presenta un angolo di 180° e gli altri due angoli hanno ampiezza nulla.*

Date tre misure costruire un triangolo.

Dati tre segmenti, che soddisfino la regola di costruibilità dei triangoli, è possibile costruire solo un tipo di triangolo.

Si disegna un segmento AB di lunghezza pari alla prima misura nota.

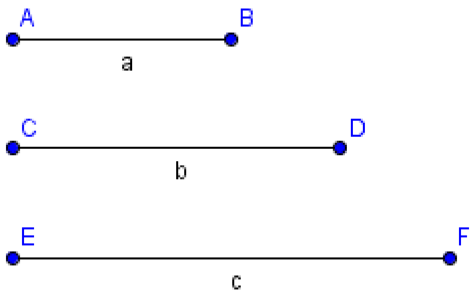
Si impone al compasso un'apertura pari alla seconda misura data.

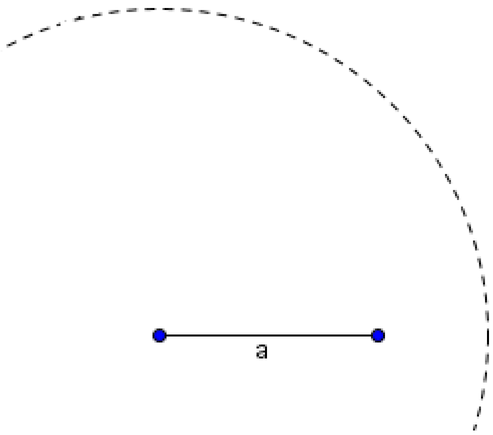
Si traccia una circonferenza, con apertura pari a quella della seconda misura nota, con centro in uno dei vertici del segmento disegnato.

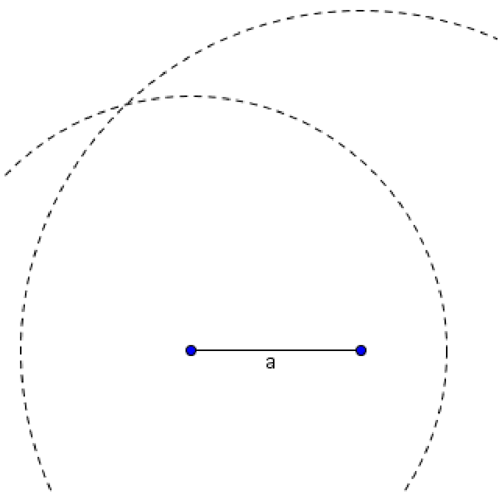
S'impone al compasso un'apertura pari alla terza misura.

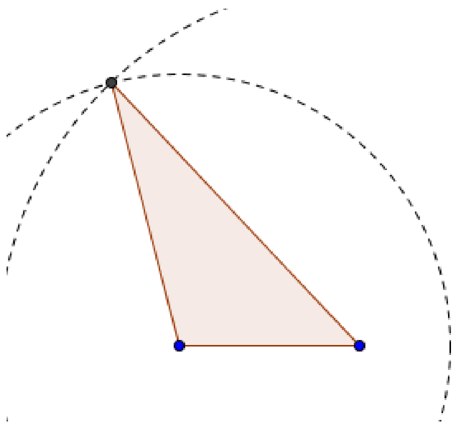
Si traccia una circonferenza, con apertura pari a quella della terza misura nota, con centro nell'altro vertice del segmento disegnato e in modo che tale circonferenza intersechi la prima (punto C).

Si uniscono i vertici del segmento disegnato con tale intersezione. Si ottiene in questo modo il triangolo.







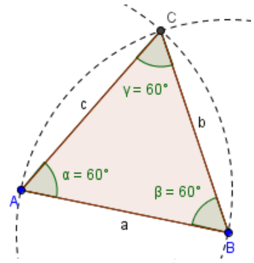


Classificazione dei triangoli

Classificazione in base ai lati

In un **triangolo equilatero** tutti i lati hanno lunghezza uguale.

Un triangolo equilatero è anche equiangolo (gli angoli interni sono tutti pari a 60°).

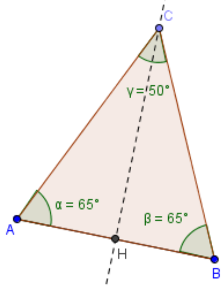


In un **triangolo isoscele** due lati hanno lunghezza uguale.

Un triangolo isoscele ha due angoli interni uguali (angoli detti adiacenti alla base; l'altro angolo è detto angolo al vertice).

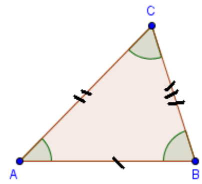
Teorema

Condizione necessaria e sufficiente perché un triangolo sia isoscele è che abbia due angoli congruenti.



In un **triangolo scaleno** tutti i lati hanno lunghezze differenti.

Gli angoli interni di un triangolo scaleno sono tutti differenti.

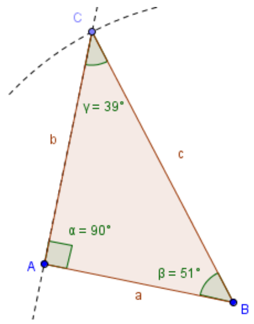


Classificazione in base ai lati

Un **triangolo rettangolo** ha un angolo interno di 90° (angolo retto). Il lato opposto all'angolo retto è detta ipotenusa ed è il lato più lungo del triangolo rettangolo. Gli altri due lati del triangolo sono detti cateti.

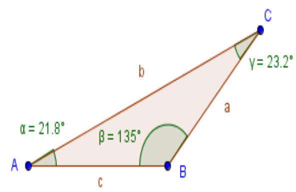
Per questo triangolo valgono il teorema di Pitagora e i teoremi di Euclide.

In un triangolo rettangolo il circocentro (assi) cade a metà ipotenusa.
In un triangolo rettangolo l'ortocentro (altezze) cade nel vertice dell'angolo retto.



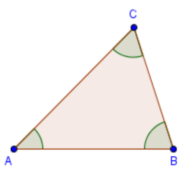
Un **triangolo ottusangolo** ha un angolo interno maggiore di 90° (angolo ottuso).

In un triangolo ottusangolo, l'ortocentro (altezze) si trova al di fuori del triangolo stesso.
Sono interni l'incentro, il baricentro e il circocentro.

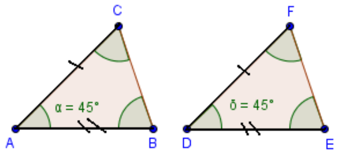


Un **triangolo acutangolo** ha tutti gli angoli interni minori di 90° (angoli acuti).

Incentro, baricentro e circocentro sono tutti è tre sempre interni a qualsiasi triangolo acutangolo.



Due triangoli sono congruenti se soddisfano almeno uno dei **criteri di congruenza**.

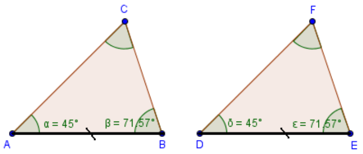


$\alpha \cong \delta$

$AB \cong DE$ e $AC \cong DF$

Primo criterio LAL

Due triangoli sono congruenti se hanno due lati e l'angolo fra essi compreso ordinatamente congruenti.



$\alpha \cong \delta$ e $\beta \cong \varepsilon$

$AB \cong DE$

Secondo criterio ALA

Due triangoli sono congruenti se hanno un lato e i due angoli a esso adiacenti ordinatamente congruenti (generalizzabile due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente un lato e due angoli qualsiasi congruenti).

$AB \cong DE$

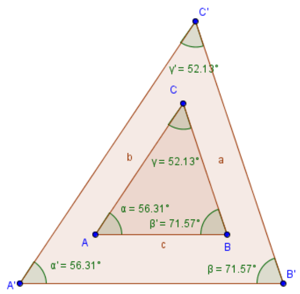
$BC \cong EF$

$AC \cong DF$

Terzo criterio LLL

Due triangoli sono congruenti se hanno tutti i lati ordinatamente congruenti.

Due triangoli si dicono simili se soddisfano almeno uno dei **criteri di similitudine**.



$\alpha \cong$

$\beta \cong \gamma$

Primo criterio AAA

Due triangoli sono simili se e solo se hanno ordinatamente tre angoli congruenti.

- Due triangoli equilateri sono sempre simili.
- Due triangoli rettangoli, con un angolo acuto congruente, sono simili.
- Due triangoli isosceli, con gli angoli al vertice congruenti, sono simili.
- Questo risultato non vale per gli altri poligoni (rettangoli con lati diversi).

$\alpha = \alpha'$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Secondo criterio

Due triangoli sono simili se hanno un angolo congruente e i lati che lo comprendono in proporzione.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Terzo criterio

Due triangoli sono simili se hanno i lati in proporzione.

Triangolo rettangolo

Il triangolo rettangolo è un triangolo molto particolare e studiato, se ne conoscono diverse proprietà e vi si applicano diversi teoremi.

Angoli del triangolo rettangolo

Un'applicazione della regola della somma degli angoli interni di un triangolo rettangolo che ha, quindi, un angolo retto è la seguente proprietà.

Se un triangolo ABC è rettangolo in A, allora gli angoli in B e in C sono complementari (somma 90°).

Se un triangolo, quindi, ha due angoli complementari, allora è rettangolo.

Costruzione di un triangolo rettangolo

E' possibile costruire un triangolo rettangolo conoscendo solo due delle sue dimensioni. Vi è, quindi, una relazione che lega tra di loro i lati di questo tipo di triangolo (teorema di Pitagora).

Conoscendo i due cateti

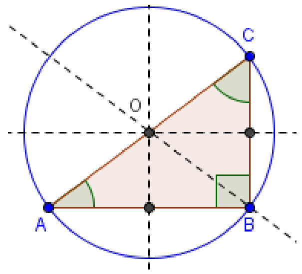
Si tracciano due segmenti perpendicolari delle dimensioni note. Il terzo lato, l'ipotenusa, si ottiene senza che occorra conoscerne la sua lunghezza.

Conoscendo un cateto e l'ipotenusa

Si traccia un segmento pari alla lunghezza del cateto noto. Si traccia la perpendicolare a tale segmento passante per un suo estremo. Si traccia un arco di cerchio di ragione pari alla lunghezza dell'ipotenusa. Il terzo lato, l'altro cateto, si ottiene senza che occorra conoscerne la lunghezza.

Cerchio circoscritto a un triangolo rettangolo

Per tutti i triangoli esiste un cerchio che passa per i suoi vertici. Si dice che il cerchio è circoscritto al triangolo o che il triangolo è inscritto nel cerchio. Il centro di tale cerchio è il punto d'incontro delle mediane del triangolo.



Se un triangolo è rettangolo, allora il centro del cerchio circoscritto cade nel punto medio dell'ipotenusa.

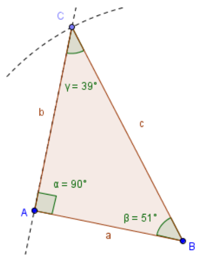
Ne consegue che…

Se un triangolo è rettangolo, allora la lunghezza della mediana relativa all'ipotenusa è pari alla metà della lunghezza dell'ipotenusa.

Proprietà delle mediane

Classificazione dei triangoli in base agli angoli

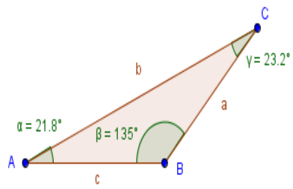
Un **triangolo** è **rettangolo** se il quadrato del lato maggiore è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati.



In un triangolo ottusangolo

$c^2 = a^2 + b^2$

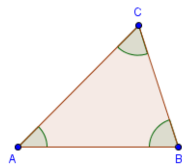
Un **triangolo ottusangolo** ha un angolo interno maggiore di 90° (angolo ottuso).



In un triangolo ottusangolo

$c^2 > a^2 + b^2$

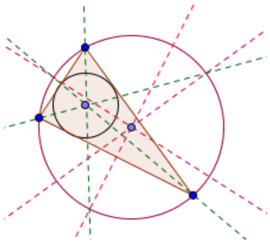
Un **triangolo acutangolo** ha tutti gli angoli interni minori di 90° (angoli acuti).



In un triangolo ottusangolo

$c^2 < a^2 + b^2$

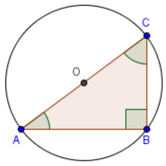
Condizioni d'inscrittibilità per i triangoli



Un poligono è inscrittibile in una circonferenza se gli assi dei suoi lati s'incontrano in un unico punto, detto circocentro del poligono.

Un triangolo è sempre inscrittibile in una circonferenza, esistendo per tutti i triangoli, il circocentro.

In un triangolo rettangolo in centro del cerchio circoscritto cade a metà dell'ipotenusa. Pertanto se un triangolo è inscritto in un cerchio e uno dei suoi lati è il diametro del cerchio, allora il triangolo è rettangolo.



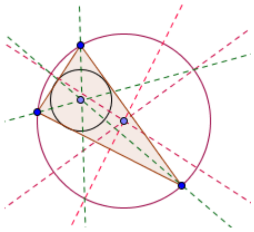
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$$raggio\ cerchio\ inscritto = r = \frac{A}{p}$$

Dove sono a, b, c sono le misure dei lati del triangolo e A è l'area del triangolo.

Condizioni di circoscrittibilità per i triangoli



Un poligono è circoscrittibile in una circonferenza se le bisettrici dei suoi angoli s'incontrano in un unico punto, detto incentro del poligono.

Un triangolo è sempre circoscivibile a una circonferenza, esistendo per tutti i triangoli, l'incentro.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$$raggio\ cerchio\ circoscritto = r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A}$$

Dove sono a, b, c sono le misure dei lati del triangolo e A è l'area del triangolo.