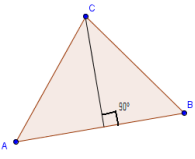
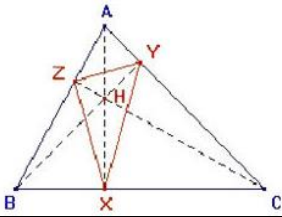
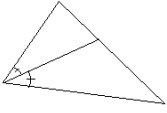
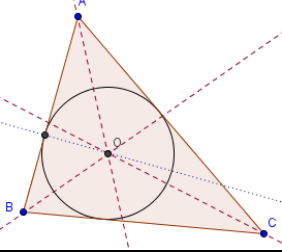
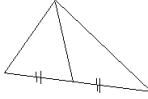
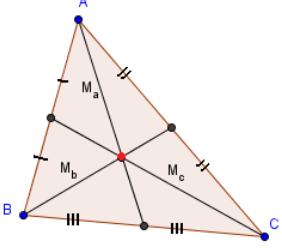
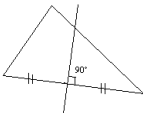
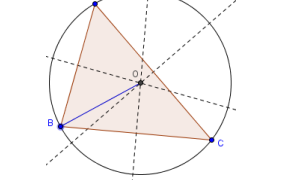
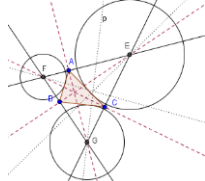


Punti notevoli di un triangolo

Particolarmente importanti in un triangolo sono i punti dove s'intersecano specifici segmenti, rette o semirette ([Encyclopedia of Triangle Centers](#), ETC). Questi punti sono detti **punti notevoli** di un triangolo. I principali punti notevoli sono utilizzabili per definire alcune caratteristiche dei triangoli. Tra questi hanno per noi rilevanza **ortocentro** (incontro delle altezze), **incentro** (incontro delle bisettrici), **baricentro** (incontro delle mediane), **circocentro** (incontro degli assi) ed **excentro**.

<p>Altezza</p> 	<p>ORTOCENRO</p> 	<p>Dato dall'incrocio delle altezze. Simbolo H, X4 (ETC)</p>	<p>L'ortocentro è esterno nei triangoli ottusangoli. Cade nel vertice dell'angolo retto nel triangolo rettangolo.</p>
<p>Bisettrice</p> 	<p>INCENTRO</p> 	<p>Dato dall'incrocio delle bisettrici. Simbolo I, X1 (ETC)</p>	<p>E' sempre interno. Equidistante dai lati. Centro del cerchio inscritto.</p>
<p>Mediana</p> 	<p>BARICENTRO</p> 	<p>Dato dall'incrocio delle mediane. Simbolo G, X2 (ETC)</p>	<p>E' sempre interno. E' il punto di equilibrio della figura. Divide la mediana in parti che sono una il doppio dell'altra (3 parti uguali). Punto di equilibrio. Nel caso particolare del triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa.</p>
<p>Asse</p> 	<p>CIRCOCENTRO</p> 	<p>Dato dall'incrocio degli assi. Simbolo O, X3 (ETC)</p>	<p>Equidistante dai vertici. Centro del cerchio circoscritto. Il circocentro è esterno nei triangoli ottusangoli. Cade a metà ipotenusa nei triangoli rettangoli.</p>
	<p>EXCENTRO</p> 	<p>Punto d'intersezione delle bisettrici di due angoli esterni e della bisettrice dell'angolo interno non adiacente a essi.</p>	<p>Ogni triangolo ha tre excentri, che sono i centri delle tre circonferenze exinscritte (o exscritte), cioè tangenti a un lato del triangolo e ai prolungamenti degli altri due.</p>
<p>altezze, mediane, assi</p>	<p>RETTA DI EULERO</p>	<p>La Retta di Eulero è la retta passante per l'ortocentro, il baricentro e il circocentro di un triangolo.</p>	<p>ortocentro (altezze) baricentro (mediane) circocentro (assi)</p>

ORTOCENTRO ↔ Altezze

Un triangolo ha tre **altezze**, ognuna relativa a un vertice.

Le altezze sono i segmenti che cadono perpendicolarmente da un vertice sino a intersecare la retta su cui giace il lato opposto a formare un angolo retto (distanza minima tra il vertice e tale retta).

Le altezze di un triangolo non sono sempre interne. Nel triangolo rettangolo due altezze corrispondono ai cateti e nel triangolo ottusangolo due altezze sono sterne ed è interna solo quella relativa al lato maggiore.

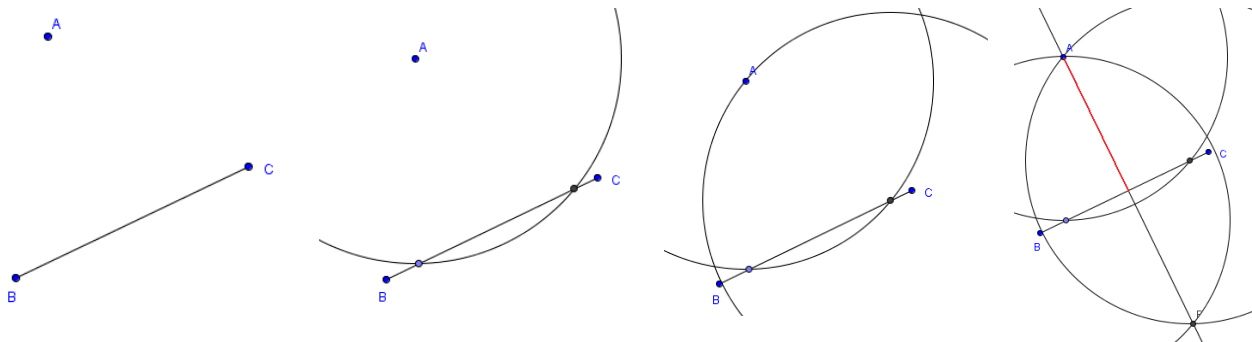
Teorema

Tutte le altezze o le relative rette di un triangolo qualsiasi s'intersecano in un unico punto, detto **ORTOCENTRO** (simbolo H, [ETC X4](#)).

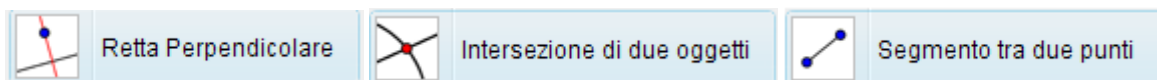
Costruzione

Per costruire l'altezza relativa a un vertice si può utilizzare la squadra e una stecca.

Per costruire l'**altezza** di un punto da una data retta si traccia una circonferenza con il centro nel punto e arrivi a intersecare il segmento in due punti distinti. Puntando il compasso nei punti di intersezione e prendendo come raggio il punto dato si disegnano altre due circonferenze. La retta che unisce i punti d'intersezione delle due circonferenze consente di individuare il segmento di minima distanza dalla retta del punto (altezza).



Software come GeoGebra (www.geogebra.org) hanno una primitiva per trovare la retta relativa a una delle altezze di un triangolo.



Misura delle altezze

$$h_i = \frac{\sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{2l_i} \quad \text{dove con } l_i \text{ si indica un lato qualsiasi}$$

INCENTRO ↔ Bisettrici

La **bisettrice** di un angolo è la semiretta che divide l'angolo in due parti uguali.

Teorema

Tutte le bisettrici interne di un triangolo qualsiasi s'intersecano in un unico punto, detto **INCENTRO**, equidistante da ciascun lato del triangolo (simbolo I, [ETC X1](#)).

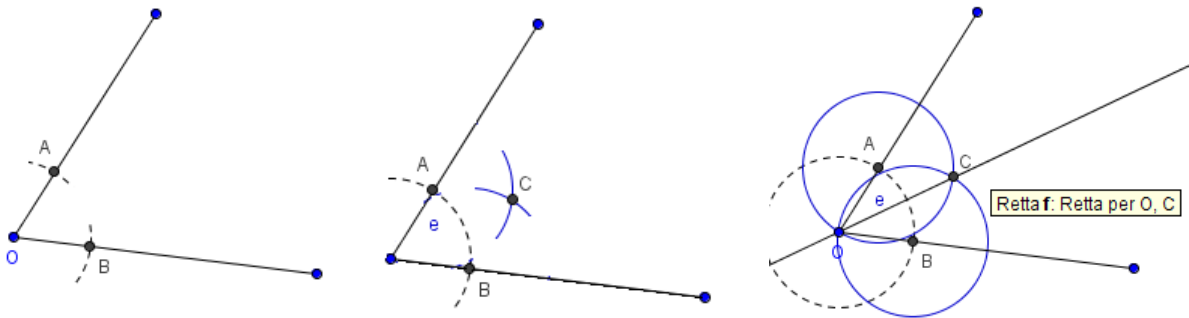
La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in due segmenti proporzionali agli altri due lati.

Costruzione

Per costruire la bisettrice di un angolo dato e di origine O utilizziamo la proprietà di cui godono tutti e solo i suoi punti, cioè di essere equidistanti dai lati dell'angolo.

Puntando il compasso nell'origine O dell'angolo, con raggio a piacere, con un arco s'individuano due punti A e B sui lati dell'angolo. Tracciando due circonferenze centrate in A e in B, sempre con raggio AB, si trovano i punti d'intersezione fra le due.

Si traccia infine una retta da O passante per tale intersezione, retta che è la bisettrice dell'angolo dato.

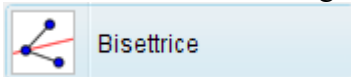


Euclide

Nella proposizione IV.4 degli Elementi, Euclide mostra come inscrivere un cerchio in un triangolo individuandone l'incentro come intersezione delle bisettrici.

GeoGebra

Software come GeoGebra dispongono di una primitiva per la bisettrice di un angolo dato (basta indicare i due lati dell'angolo).



BARICENTRO ↔ Mediane

La **mediana** di un triangolo è il segmento che congiunge un vertice del triangolo con il punto medio del lato opposto.

Teoremi

Le mediane di un triangolo s'incontrano in un punto, interno al triangolo, detto **BARICENTRO** (simbolo G, [ETC X2](#)).

Il baricentro divide ciascuna mediana in due parti tali che quella avente per estremo un vertice è doppia dell'altra (1:2).

Ciascuna mediana di un triangolo divide il triangolo in due triangoli di uguale area. Di conseguenza le tre mediane di un triangolo lo scompongono in sei triangoli di uguale area.

Nel caso particolare del triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa. Il triangolo rettangolo è, infatti, sempre inscritto in una semicirconferenza il cui diametro è l'ipotenusa mentre la mediana coincide con un raggio.

Costruzione

Per costruire l'asse di un segmento dato si traccia una circonferenza con il centro in un estremo del segmento, e che abbia il raggio di una misura qualsiasi purché maggiore della metà del segmento dato. Mantenendo la stessa apertura del compasso, si ripete la costruzione centrando un'altra circonferenza nell'altro estremo. La retta che unisce i punti d'intersezione delle due circonferenze passa per il punto medio del segmento (vedi illustrazione per la costruzione dell'asse di un segmento).

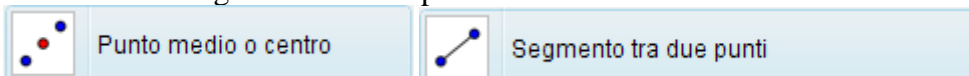
Misura delle mediane

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

Software come GeoGebra hanno una primitiva per il punto medio di un segmento dato e per la costruzione di segmenti dati due punti.



In fisica il baricentro identifica il punto in cui è applicata la forza risultante di tutte le forze peso parallele. Coincide con il centro di massa di un corpo se questo ha densità uniforme o la distribuzione della materia deve avere alcune proprietà di simmetria. Coincide anche con il suo centro di gravità quando il baricentro coincide con il centro di massa del corpo che deve essere in un campo gravitazionale uniforme.

Vedi: it.wikipedia.org/wiki/Centro_di_massa

Asse di un segmento

L'**asse di un segmento** è la perpendicolare al segmento, condotta dal suo punto medio (punto del segmento equidistante dai suoi estremi).

Teorema

L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento.

Teoremi

Tutti gli assi di un triangolo qualsiasi s'incontrano in uno stesso punto, detto **CIRCOCENTRO** (simbolo O, [ETC X3](#)).

Nel caso particolare del triangolo rettangolo esso coincide con il punto medio dell'ipotenusa.

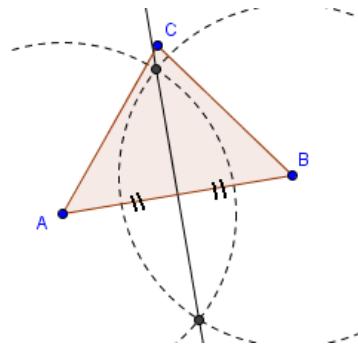
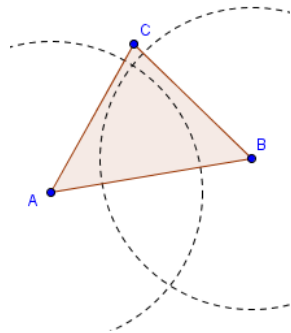
Costruzione

Per costruire l'**asse di un segmento** dato si traccia una circonferenza con il centro in un estremo del segmento, e che abbia il raggio di una misura qualsiasi purché maggiore della metà del segmento dato. Mantenendo la stessa apertura del compasso, si ripete la costruzione centrando un'altra circonferenza nell'altro estremo. La retta che unisce i punti d'intersezione delle due circonferenze è l'asse del segmento.

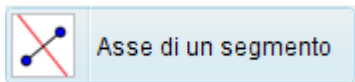
Tale retta passa per il punto medio del segmento.

Tale punto del segmento gode anch'esso della proprietà di essere equidistante dagli estremi del segmento.

Da tale costruzione puoi osservare che l'asse di un segmento passa per il punto medio ed è perpendicolare al segmento.



Software come GeoGebra hanno una primitiva per l'asse di un segmento.



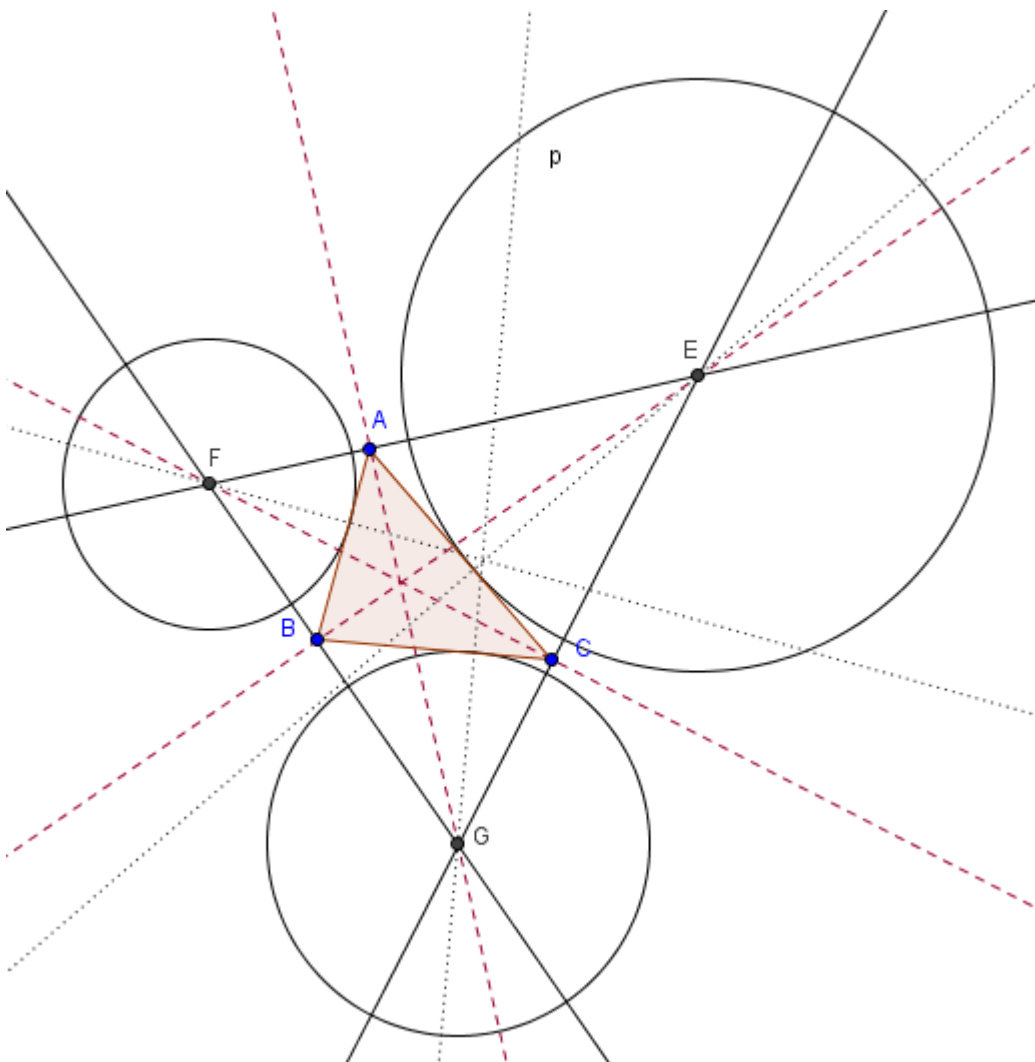
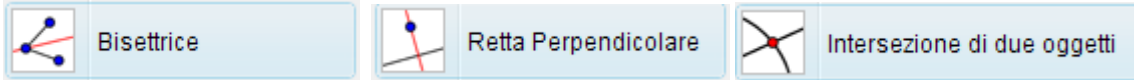
Euclide

Nella proposizione IV.5 degli Elementi, Euclide mostra come circoscrivere un cerchio in un triangolo individuandone il circocentro come intersezione dei suoi assi.

Excerchi

Utilizzando GeoGebra è possibile creare gli excerchi usando semplicemente la funzione bisettrice, che già disegna quanto serve per trovare gli excentri. Usando, quindi, la funzione perpendicolare a una retta per un punto dato si trovano i raggi e i centri (punto di intersezione) dei cerchi da disegnare e che sono tangenti ai lati.

Un triangolo come vedi ha tre excerchi.

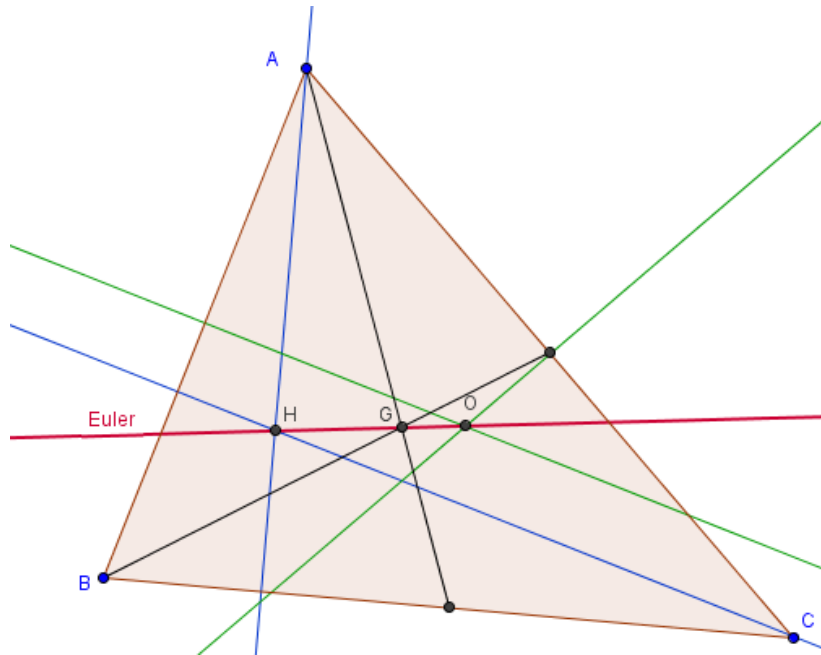


Retta di Eulero

La Retta di Eulero (Basilea, 15 aprile 1707 – San Pietroburgo, 18 settembre 1783) è la retta passante per l'**ortocentro** (incontro delle altezze), il **baricentro** (incontro delle mediane) e il **circocentro** (incontro degli assi) di un triangolo.

Indicando con G il baricentro, O il circocentro e H l'ortocentro si ha che $OH/GO = 3$. Il baricentro divide, infatti, il segmento che unisce ortocentro e circocentro in due parti una il doppio dell'altra.

Per disegnarla basta ricordare che sono sufficienti due soli segmenti notevoli per trovare la loro intersezione senza disegnare il terzo (ad esempio basta individuare l'intersezione di due altezze per trovare l'ortocentro).



Per saperne di più di Eulero it.wikipedia.org/wiki/Eulero

Altri punti notevoli di un triangolo, come il centro della circonferenza che passa per i tre punti medi dei lati del triangolo, detta **cerchio dei nove punti**, giacciono sulla retta di Eulero.

E' possibile, quindi, verificare il **teorema di Feuerbach** (Karl Feuerbach, Jena, 30 maggio 1800 – Erlangen, 12 marzo 1834).

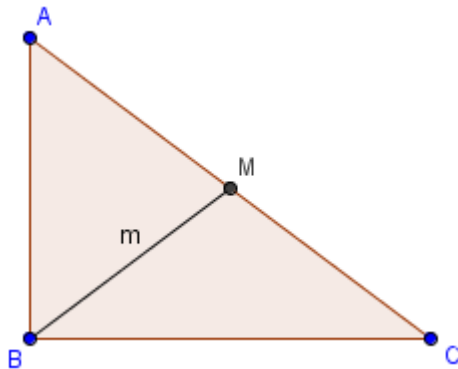
Il cerchio inscritto è tangente internamente al cerchio dei nove punti e questo è tangente esternamente ai tre cerchi ex-inscritti.

Il punto in cui il cerchio inscritto nel triangolo e il cerchio dei nove punti si toccano è spesso denominato come **punto di Feuerbach**.

Feuerbach dimostrò anche che il centro della circonferenza dei nove punti giace sulla retta di Eulero tra l'ortocentro e il circocentro, a uguale distanza da essi, e che il cerchio di Eulero è tangente internamente al cerchio inscritto e esternamente ai tre cerchi ex-inscritti.

Teorema della mediana

In un triangolo il doppio del quadrato della mediana relativa ad un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuito della metà del quadrato del primo lato.



Da cui la seguente identità:

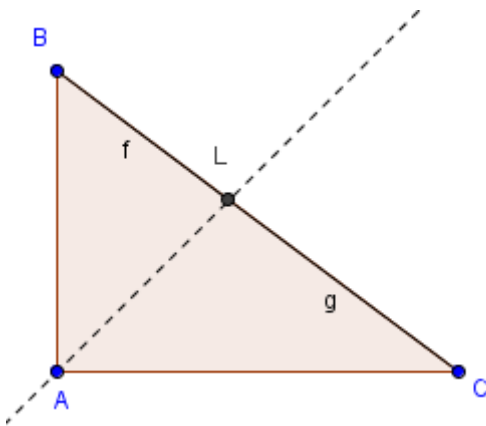
$$2m^2 = AB^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2}$$

Nell'esempio dato per il triangolo rettangolo di lati 3, 4 e 5 si ha:

$$m = \sqrt{\frac{AB^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3^2 + 4^2 - \frac{5^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{9 + 16 - 12,5}{2}} = \sqrt{6,25} = 2,5$$

Teorema della bisettrice

In un triangolo due lati stanno fra loro come le parti in cui resta diviso il terzo lato dalla bisettrice dell'angolo interno a esso opposto.



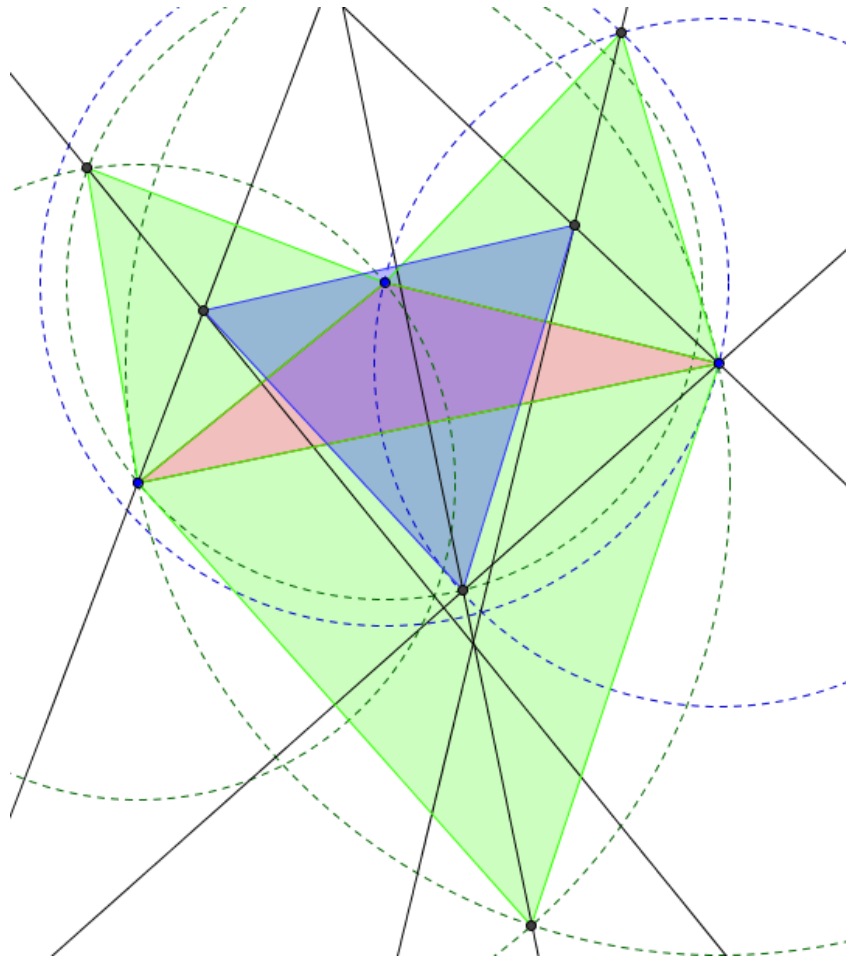
Dato il triangolo ABC e la bisettrice AL dell'angolo interno in A, si ha la proporzione:

$$BA : AC = BL : LC$$

Teorema di Napoleone

Teorema attribuito come intuizione a Napoleone Bonaparte (Ajaccio, 15 agosto 1769 – Isola di Sant'Elena, 5 maggio 1821).

Costruendo esternamente ai lati di un triangolo qualsiasi dei triangoli equilateri, i baricentri di questi formano un triangolo equilatero.



Realizzazione con GeoGebra

Per saperne di più di storia it.wikipedia.org/wiki/Napoleone_Bonaparte

Altri punti notevoli di un triangolo

Simbolo in Encyclopedia of Triangle Centers	Nome in lingua italiana	Nome in lingua inglese	Notazione
X_1	Incentro	Incenter	I
X_2	Baricentro	Centroid	G
X_3	Circocentro	Circumcenter	O
X_4	Ortocentro	Orthocenter	H
X_5	Centro dei nove punti	Nine-point center	N
X_6		Symmedian point	K
X_7		Gergonne point	G_e
X_8		Nagel point	N_a
X_9		Mittelpunkt	M
X_{10}		Spieker center	S_p
X_{11}	Punto di Feuerbach	Feuerbach point	F
X_{13}	Punto di Fermat	Fermat point	X
X_{15}		Isodynamic points	S
X_{16}			S'
X_{17}	Punti di Napoleone	Napoleon points	N
X_{18}			N'
X_{99}	Punto di Steiner	Steiner point	S

Tratto da en.wikipedia.org/wiki/Triangle_center