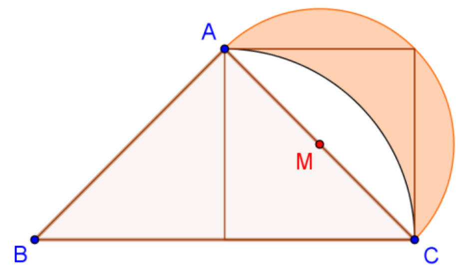
# *Tre problemi nei dintorni di Pitagora…*

**ovvero come algebra e geometria si mescolano intorno ad un triangolo rettangolo.**

**Quesito 1.**

Con riferimento alla figura, proviamo che la misura dell'area del triangolo isoscele ABC è equivalente alla misura dell'area della parte indicata in colore e indicata con il nome di lunula (*lunula di Ippocrate*).




*Risoluzione.*

Anzitutto, osserviamo che la porzione grigia si ottiene tracciando prima un arco di circonferenza di centro C e raggio pari a CA (arco interno), e quindi un arco di circonferenza di centro M e raggio MA (arco esterno), con M punto medio di AB.

Sia $l$ la lunghezza dei lati AB e BC, poiché il triangolo è rettangolo isoscele ( $AB \cong BC$ ). Da qui si ricava immediatamente che l'area del triangolo è:

$$Area_{ABC} = \frac{l^2}{2}$$

La misura della superficie della lunula, evidenziata in colore, può essere ottenuta come differenza di aree, togliendo al semicerchio di centro M e raggio MA l'area compresa tra l'arco AB e la stessa ipotenusa AB e a sua volta pensata come l'area del quarto di cerchio di centro C e raggio CA meno l'area del triangolo rettangolo isoscele ABC. In simboli, essendo $l\sqrt{2}$ la lunghezza di AB, avremo:

$$Area_{lunula} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot l^2}{4} - \frac{l^2}{2}\right) = \frac{\pi \cdot l^2}{4} - \frac{\pi \cdot l^2}{4} + \frac{l^2}{2} = \frac{l^2}{2}$$

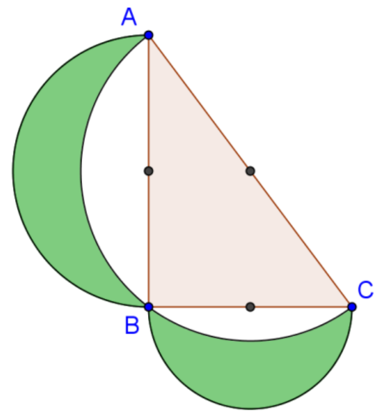
quindi:

$$Area_{ABC} = \frac{l^2}{2} = Area_{lunula}$$

che è quanto volevamo dimostrare.

**Quesito 2.**

Con riferimento alla figura, dimostriamo che la misura dell'area delle lunule in colore è equivalente alla misura dell'area del triangolo rettangolo (*problema delle lunule di Alhazen*).




*Risoluzione.*

Possiamo pensare a questo problema come a una variante del problema precedente, così come la costruzione stessa della figura.

Siano:

$\mathrm{AB} = c_1$, $\mathrm{BC} = c_2$ e, di conseguenza, $\mathrm{CA} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.

L'area del triangolo è: $Area_{ABC} = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{2}$.

L'area delle lunule in colore va calcolata in un'unica operazione, togliendo ai semicerchi, rispettivamente di diametro AB e BC, le aree delle lunette bianche che insistono sui medesimi diametri e tenendo conto del contributo dell'area del triangolo. Avremo:

$$Area_{lunule} = \left[ \frac{\pi \cdot \left( \frac{c_1}{2} \right)^2}{2} + \frac{\pi \cdot \left( \frac{c_2}{2} \right)^2}{2} \right] - \left[ \frac{\pi \cdot \left( \frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{2} \right)^2}{2} - \frac{c_1 \cdot c_2}{2} \right]$$

Con l'aiuto di qualche raccoglimento a fattore comune e un po' di algebra dei segni, arrangiamo la scrittura come segue:

$$Area_{lunule} = \frac{\pi}{2} \cdot \left( \frac{c_1^2 + c_2^2}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \cdot \left( \frac{c_1^2 + c_2^2}{2} \right) + \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$$

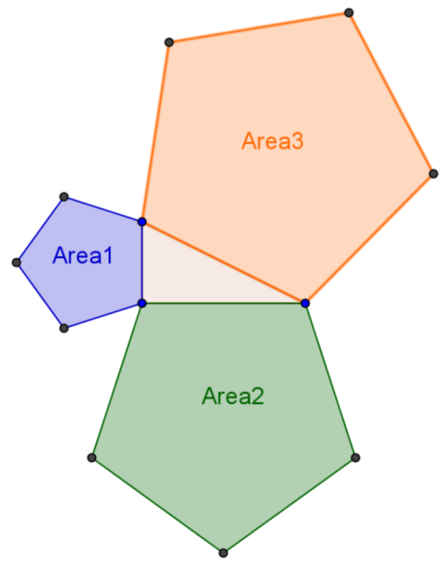
Se confrontiamo questo risultato con il valore calcolato per l'area del triangolo rettangolo ricaviamo quanto ci eravamo proposti di dimostrare:

$$Area_{ABC} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = Area_{lunule}$$

**Quesito 3.** Proviamo che, in ogni triangolo rettangolo, l'area del poligono regolare costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei poligoni regolari costruiti sui cateti, sotto la condizione che tali poligoni abbiano tutti il medesimo numero di lati.

*Risoluzione.*

A titolo di esempio, applichiamo il teorema di Pitagora usando neo dei quadrati ma dei pentagoni regolari.




Ci chiediamo quindi se:

Area 1 + Area 2 = Area 3

*comunque* vengano presi dei poligoni regolari costruiti sui lati del triangolo rettangolo.

La risposta al quesito viene dalle terne pitagoriche: ricordiamo che si chiama terna pitagorica una collezione di numeri $n_1$, $n_2$ e $n_3$ che soddisfano alla scrittura:

$$n_1^2 + n_2^2 = n_3^2$$

sottintendendo la relazione d'ordine $n_1 < n_2 < n_3$. Si dimostra che, se $k$ è un numero qualsiasi, anche la terna $kn_1$, $kn_2$ e $kn_3$ è una terna pitagorica.

Come si calcola la misura dell'area di un poligono regolare? La formula è la seguente:

$$Area_{poligonoregolare} = \frac{2p \cdot a}{2}$$

dove $2p$ è il perimetro e $a$ l'apotema.

Per i poligoni regolari esiste una relazione tra il lato del poligono e l'apotema. Il rapporto tra l'apotema e il lato è per ogni poligono regolare costante e caratteristica.

La misura dell'apotema si ricava moltiplicando la misura del lato – che indicheremo con $l$ – per quello che convenzionalmente prende il nome di *numero fisso*, e il perimetro si ricava moltiplicando la misura di un lato per il numero totale dei lati.

Si ha:

$$Area_{poligonoregolare} = \frac{2p \cdot a}{2} = \frac{(n_{lati} \cdot l) \cdot (l \cdot n_{fisso})}{2} = \frac{(n_{lati} \cdot n_{fisso})}{2} \cdot l^2$$

Sotto il vincolo di considerare poligoni con lo stesso numero di lati (come i tre pentagoni della figura), è evidente che la scrittura:

$$\frac{(n_{lati} \cdot n_{fisso})}{2}$$

è a sua volta un valore numerico positivo e *costante* e potremo indicarlo come:

$$\frac{(n_{lati} \cdot n_{fisso})}{2} = k^2$$

Se $l_1$, $l_2$ e $l_3$ sono rispettivamente le misure dei lati dei pentagoni 1, 2 e 3, avremo:

$$Area_1 = \frac{n_{lati} \cdot n_{fisso}}{2} \cdot l_1^2 = k^2 \cdot l_1^2 \qquad Area_2 = \frac{n_{lati} \cdot n_{fisso}}{2} \cdot l_2^2 = k^2 \cdot l_2^2$$

$$Area_3 = \frac{n_{lati} \cdot n_{fisso}}{2} \cdot l_3^2 = k^2 \cdot l_3^2$$

Ma ABC è un triangolo rettangolo. Necessariamente, quindi, le misure dei suoi lati soddisfano al teorema di Pitagora e sono una terna pitagorica. Ma, se osserviamo le formule delle aree scritte qui sopra, notiamo che in tutte compare il medesimo fattore $k^2$, il che significa che, poiché vale la:

$$l_1^2 + l_2^2 = l_3^2$$

si avrà – per le proprietà delle terne pitagoriche – che è verificata anche:

$$k^2 \cdot l_1^2 + k^2 \cdot l_2^2 = k^2 \cdot l_3^2$$

Il teorema di Pitagora si estende, quindi, anche a tutti i poligoni regolari, nel cui insieme si colloca anche il quadrato, costruiti sui cateti e sull'ipotenusa.