

Dimostrare l'irrazionalità di radice quadrata di 2

All'insieme \mathbb{Q} , dei numeri razionali, appartengono numeri che possono essere rappresentati come frazioni nella forma m/n con m e n che appartengono all'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali. I numeri che non si possono rappresentare sotto forma di frazione sono indicati come numeri irrazionali. Numeri razionali e numeri irrazionali costituiscono l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali.

La radice quadrata di 2, come altri radicali, è un numero irrazionale ($\sqrt{2}$ è irrazionale).

Si può dimostrare questa proposizione ricorrendo a una dimostrazione per assurdo. Si presuppone vero che $\sqrt{2}$ possa essere espressa da una frazione, affermazione contraria all'irrazionalità della radice quadrata di 2, e si mostra che questo presupposto porta a una contraddizione.

Affermare che $\sqrt{2}$ è irrazionale significa affermare che la radice quadrata di 2 non può essere espressa sotto forma di frazione m/n . L'affermazione contraria della precedente presuppone che la radice quadrata di 2 può essere espressa da una frazione, ridotta ai minimi termini, e che esistono due numeri naturali m e n , primi tra loro, tali che si possa scrivere la relazione seguente.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

Elevando al quadrato i due termini dell'uguaglianza ottengo la seguente relazione.

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2$$

Dalla precedente uguaglianza, ottenuta elevando tutti i termini alla seconda, segue che

$$\frac{m^2}{n^2} \cdot n^2 = 2 \cdot n^2 \rightarrow m^2 = 2 \cdot n^2$$

Possiamo osservare, prima di proseguire, che un qualsiasi numero naturale moltiplicato per 2 produce un numero pari e che un numero naturale pari qualsiasi può essere rappresentato come prodotto di 2 per un altro numero naturale. Si ha inoltre che se il quadrato di un numero naturale qualsiasi è pari lo è anche la base della potenza.

Il numero m è, quindi, pari e può essere ottenuto a sua volta come prodotto di 2 per un altro numero naturale che indichiamo con k . Sostituendo si ottengono le seguenti uguaglianze.

$$m = 2 \cdot k \rightarrow (2 \cdot k)^2 = 2 \cdot n^2$$

$$4 \cdot k^2 = 2 \cdot n^2$$

Le proprietà delle uguaglianze nota ci permettono di dividere entrambi i membri per 2 ottenendo

$$\frac{4 \cdot k^2}{2} = \frac{2 \cdot n^2}{2} \rightarrow 2 \cdot k^2 = n^2$$

Ne consegue che anche n^2 è pari e lo è, quindi, anche n .

Avendo presupposto che la radice quadrata di 2 possa essere espressa da una frazione m/n , ridotta ai minimi termini, con m e n numeri naturali primi tra loro, e che non possono, quindi, essere entrambi pari, si ha la contraddizione con l'ipotesi di partenza.

La $\sqrt{2}$ non può essere, quindi, espressa come frazione o numero razionale. A $\sqrt{2}$ la storia assegna il primo incontro con l'irrazionalità e, in termini geometrici, rappresenta la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti unitari.

Riferimenti utilizzati e approfondimenti

Numero irrazionale (Wikipedia)

it.wikipedia.org/wiki/Numero_irrazionale

Radice quadrata di 2 (Wikipedia)

it.wikipedia.org/wiki/Radice_quadrata_di_2

Dimostrazione per assurdo (Wikipedia)

it.wikipedia.org/wiki/Dimostrazione_per_assurdo

Dimostrazione della irrazionalità di π (Wikipedia)


it.wikipedia.org/wiki/Dimostrazione_della_irrazionalit%C3%A0_di_%CF%80


Dimostrazione della irrazionalità di e (Wikipedia)


it.wikipedia.org/wiki/Dimostrazione_della_irrazionalit%C3%A0_di_e


Appunti delle lezioni del [prof. Sisto Baldo](#) del corso PAS A059 del 2014 presso Università degli Studi di Verona.


Keywords

 *Matematica, Aritmetica, espressioni, addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, elevamento a potenza, base, esponente, potenza, proprietà delle potenze, estrazione di radice quadrata, radicali, estrazione di radice, radice quadrata, quadrati perfetti, radice quadrata a mano, I, radq(), Nepero*

 *Math, Arithmetic, Expression, Arithmetic Operations, Raise to a Power, base, exponent, power, Solved expressions with raise to a power, square root, roots, sqr(), Logarithm*

 *Matemática, Aritmética, potencia, expresiones, potencias, propiedades de las potencias, Potencias y expresiones, Raíz, Raíz cuadrada, logaritmo*

 *Mathématique, Arithmétique, Expression, Exercices de calcul et expression avec des puissances, propriété des puissances, Racine, Racine carrée, logarithme*

 *Mathematik, Arithmetik, Potenz, Rechenregeln, Basen, Exponenten, Radizierung, Quadrat-Radizierung, Logarithmus*