Rapporto

Il rapporto tra due numeri a e b, con b diversa da zero ($b \neq 0$), è il quoziente ($a : b$), esprimibile anche mediante la frazione $\frac{a}{b}$.

In un *rapporto* tra due numeri o due grandezze a e b, **a** e **b** si chiamano *termini* del rapporto.
Il primo termine è l'*antecedente* e l'altro il *conseguente*.

antecedente

$\frac{3}{4}$ termini

conseguente

Moltiplicando o dividendo entrambi i termini di un rapporto per uno stesso numero diverso da zero, si ottiene lo stesso rapporto.

Il rapporto tra due grandezze omogenee è uguale al rapporto delle loro rispettive misure espresse nella stessa unità di misura. Il rapporto è un numero puro, indipendente dall'unità di misura prescelta.

Il rapporto tra due grandezze non omogenee è uguale al rapporto delle loro rispettive misure. Il risultato è una grandezza derivata che dipende dalle unità di misura prescelte.

Grandezze omogenee	***Grandezze non omogenee***
Si ottiene un **numero puro**. Indipendente dall'unità di misura utilizzata.	Si ottiene una **grandezza derivata**. Dipendente dall'unità di misura utilizzata.
Confronto tra due superfici una che ha un'area di 120 m^2 e una di 40 m^2. $\frac{120\ m^2}{40\ m^2} = 3$ Il valore 3 indica che una superficie ha area tripla dell'altra, valore non è in metri quadrati. Se misurassi le stesse aree usando un multiplo o sottomultiplo dell'unità di misura scelta il rapporto rimarrebbe lo stesso. Ha senso in questo caso anche il rapporto inverso.	Se per andare a visitare un museo che dista 100 km da scuola si impiegano 2 ore posso usare il rapporto per trovare la velocità media. $\frac{100\ km}{2\ h} = 50\ km/h$ Se calcolo la velocità in metri al secondo ottengo un valore diverso. $\frac{100\ 000\ m}{7200\ s} = \frac{1000\ m}{72\ s} \approx 13{,}88\ m/s$
Lo stesso avviene ad esempio confrontando due distanze espresse in metri o kilometri.	Lo stesso avviene con un prezzo, riferito allo stesso bene, in €/g e €/kg.

Proporzioni

Una proporzione è un'uguaglianza di rapporti tra grandezze, a due a due omogenee, o fra misure di grandezze.

In una *proporzione* $a : b = c : d$ i termini $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$ si chiamano *antecedenti*, i termini $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{d}$ *conseguenti*, i termini $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ *medi* e i termini $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{d}$ si dicono *estremi*.

1^ termine antecedente		2^ termine conseguente		3^ termine antecedente		4^ termine conseguente
3	:	2	=	6	:	4
estremo		medio		medio		estremo

Una proporzione continua ha i medi (o gli estremi) uguali.

Se i medi sono uguali la proporzione si dice continua e il medio è detto medio proporzionale.

36	:	12	=	12	:	4
estremo		medio proporzionale		medio proporzionale		estremo

Grandezze proporzionali

Quattro grandezze $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, nell'ordine dato, si dicono proporzionali
se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono fra di loro omogenee
se lo sono anche $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$ e se $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{d}$
se cioè il rapporto fra le grandezze $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ è uguale al rapporto tra $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$

La proporzionalità fra quattro grandezze implica la proporzionalità fra le loro misure.

Esempio

$$\frac{1{,}5\ km}{2\ km} = \frac{3\ km}{4\ km} = \frac{6\ km}{8\ km} = \ \dots$$

$$1{,}5\ km : 2\ km = 3\ km : 4\ km$$

Proprietà delle proporzioni

Proprietà fondamentale delle proporzioni

Teorema fondamentale sulle proporzioni numeriche

Quattro numeri reali positivi ordinati sono in proporzione se e soltanto se il prodotto dei medi è uguale al prodotto tra gli estremi.

$$prodotto\ dei\ medi = prodotto\ degli\ estremi$$

Da $a : b = c : d$ segue $b \cdot c = a \cdot d$.

Proprietà dell'unicità del quarto proporzionale

Se $a: b = c: d$ e $a: b = c: d'$ allora $d = d'$.

Per calcolare un estremo incognito si divide il prodotto dei medi per l'altro estremo.	$estremo_1 = \dfrac{medio_1 \cdot medio_2}{estremo_2}$
Per calcolare un medio incognito si divide il prodotto degli estremi per l'altro medio.	$medio_1 = \dfrac{estremo_1 \cdot estremo_2}{medio_2}$
Per calcolare il medio proporzionale incognito si estrae la radice quadrata del prodotto degli estremi.	$medio = \sqrt{prodotto\ estremi}$

Proprietà dell'invertire

Scambiando ogni antecedente con il proprio conseguente si ottiene ancora una proporzione.

$a : b = c : d \quad \rightarrow \qquad b : a = d : c$

Proprietà del permutare

Scambiando fra loro i medi oppure gli estremi si ottiene ancora una proporzione.

$a : b = c : d \quad \rightarrow \qquad a : c = b : d \qquad\qquad d : b = c : a$

Proprietà del comporre

La somma tra il primo ed il secondo termine sta al primo (o al secondo) come la somma del terzo e del quarto sta al terzo (o al quarto).

$a : b = c : d \quad \rightarrow \qquad (a + b) : a = (c + d) : c \qquad\qquad (a + b) : b = (c + d) : d$

Proprietà dello scomporre

La differenza tra il primo e il secondo termine sta al primo (o al secondo) come la differenza tra il terzo e il quarto sta al terzo (o al quarto).

$a : b = c : d \quad \rightarrow \qquad (a - b) : a = (c - d) : c \qquad\qquad (a - b) : b = (c - d) : d$

Proprietà del comporre e dello scomporre

La somma tra il primo ed il secondo termine sta alla differenza tra il primo e il secondo termine come la somma del terzo e del quarto sta alla differenza tra il terzo e il quarto.

$a : b = c : d \quad \rightarrow \qquad (a \pm b) : a = (c \pm d) : c \qquad\qquad (a \pm b) : b = (c \pm d) : d$

Applicazioni della proporzionalità

La proporzionalità trova diverse applicazioni pratiche.

- Percentuale (che può essere vista come un rapporto)
- Problemi del tre semplice
- Problemi del tre composto
- Problemi di ripartizione semplice
- Problemi di ripartizione composta
- Matematica finanziaria (interesse, sconto, …)

Per tutti questi problemi è fondamentale stabilire prima di impostare qualsiasi strategia risolutiva se le grandezze coinvolte sono tra loro direttamente proporzionali o inversamente proporzionali.

Termine incognito di una proporzione

Noti tre valori di una proporzione il termine che non si conosce è detto termine incognito o incognita e si indica usualmente con la x.

Il termine "incognita" deriva dal latino. In matematica in termine diviene "incognita" e Maria Gaetana Agnesi così la descrive nel 1748 «Le quantità cognite e date soglionsi denominare […] con le prime lettere dell'alfabeto; le incognite, e che si cercano, con una delle ultime».

La ricerca del valore incognito si esegue applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni.

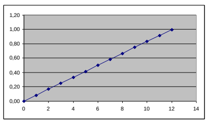
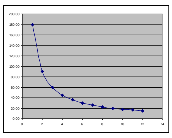
$$prodotto\ dei\ medi = prodotto\ degli\ estremi$$

Da cui

$$medio\ incognito = \frac{prodotto\ degli\ estremi}{medio\ noto}$$

$$estremo\ incognito = \frac{prodotto\ dei\ medi}{estremo\ noto}$$

$$medio\ incognito\ prop.continua = \sqrt{prodotto\ degli\ estremi}$$

Grandezze direttamente proporzionali *Directly proportional quantities*	***Grandezze inversamente proporzionali*** *Inversely proportional quantities*
Due grandezze variabili e tra di loro dipendenti sono direttamente proporzionali quando al raddoppiare, triplicare, ecc., di una anche il corrispondente valore dell'altra raddoppia, triplica, ecc.	Due grandezze variabili e tra di loro dipendenti sono inversamente proporzionali quando al raddoppiare, triplicare, ecc., di una, il corrispondente valore dell'altra diventa la metà, un terzo, ecc.
La distanza percorsa è proporzionale al tempo. Se viaggiate il doppio del tempo percorrerete una distanza doppia, se viaggiate il triplo del tempo percorrete una distanza tripla e così via. Il costo pagato per acquistare dei quaderni raddoppia se ne comperate il doppio, triplica se ne comperate il triplo e così via.	La quantità di vino disponibile per persona è inversamente proporzionale al numero di persone che siedono al tavolo. Il tempo impiegato per compiere un dato lavoro è inversamente proporzionale al numero di operai impiegati (un maggior numero di operai richiede un minore tempo)
Caso "UbiMath" ++	Caso "UbiMath" +-
Due grandezze variabili e tra di loro dipendenti sono direttamente proporzionali se è costante il rapporto tra due valori corrispondenti, qualunque sia la coppia di valori che si considera.	Due grandezze variabili e tra di loro dipendenti sono inversamente proporzionali se è costante il prodotto di due loro valori corrispondenti, qualunque sia la coppia di valori che si considera.
Distanza percorsa e tempo impiegato (velocità media) $k=\frac{30}{1}=\frac{60}{2}=\frac{90}{3}=\cdots=30\ km/h$ Prezzo e quantità acquistata (quaderno da 1,50 euro) $k=\frac{1{,}50}{1}=\frac{3{,}00}{2}=\frac{4{,}50}{3}=\cdots=1{,}5\ €/quaderno$	Lavoro in giorni uomo e numero di operai impiegati $k=16\cdot 1=8\cdot 2=4\cdot 4=\cdots=16\ giorni$ Quantità di vino disponibile per persona (2 litri a disposizione e numero di persone variabile) $k=2\cdot 1=1\cdot 2=0{,}5\cdot 4=\cdots=2\ litri$
METODO DI RIDUZIONE ALL'UNITA'	METODO DI CALCOLO DEL TOTALE
$\boxed{k=\frac{y}{x}=\frac{\text{var}\,dipendente}{\text{var}\,indipendente}}$ $\boxed{y=k\cdot x=kx}$ La rappresentazione grafica è una semiretta avente l'origine nell'origine degli assi.	$\boxed{k=x\cdot y=\text{var}\,dipendente\cdot\text{var}\,indipendente}$ $\boxed{y=\frac{k}{x}}$ La rappresentazione grafica è un ramo di iperbole equilatera.
	

Costante = valore che non cambia (usualmente indicata con k)
Variabile = valore soggetto a cambiare
Variabile indipendente = valore attribuito arbitrariamente (usualmente indicata con x)
Variabile dipendente = valore non scelto ma che è determinato dal valore attribuito alla variabile indipendente (usualmente indicata con y)

Esercizi guida per il tre semplice

Risolti utilizzando la **riduzione all'unità** o il **calcolo del totale** e la costante di proporzionalità.

Esempio 1.

In 4 ore percorrete 120 km.
Quale distanza percorrereste in 8 ore?

Caso: proporzionalità diretta (++)

Costante proporzionalità: velocità → 120 km/4 h = 30 km/h

$$8\,h \cdot 30\frac{km}{h} = 240\,km$$

Conoscendo la velocità oraria (quanti km si percorrono in un'ora) è immediato calcolare la distanza percorsa in più ore.

Esempio 2.

Sei lavoratori sono in grado di portare a termine un lavoro in 4 giorni.
Quanto impiegherebbero 12 lavoratori?

Caso: proporzionalità inversa (+-)

Costante proporzionalità: lavoro da compiere in giorni uomo → $6 \cdot 4 = 24$ giorni uomo

$$24\,giorni\ uomo : 12\,uomini\ = 2\,giorni$$

Conoscendo il totale stimato dei giorni uomo (come lavorasse un solo uomo) necessari a compiere un dato lavoro è immediato calcolare quanto impiegherebbero più uomini a compiere lo stesso lavoro.

Esempio 3.

Giovanni guadagna 180 euro in 6 ore.
Quanto guadagnerà in 8 ore di lavoro?

Caso: proporzionalità diretta (++)

Costante proporzionalità: paga oraria → 180/6 = 30 euro/h

$$8\,h \cdot 30\frac{€}{h} = 240\ €$$

Conoscendo la paga oraria (quanto si percepisce per un'ora di lavoro) è immediato calcolare la paga per più ore.

Esempio 4.

Un elefante beve circa 150 litri d'acqua al giorno (da 100 a 220 litri).
Di quanta acqua dovete disporre per mantenere in casa per 10 giorni un elefante?

Caso: proporzionalità diretta (++)

Costante proporzionalità: fabbisogno d'acqua → 150 litri/elefante

$$8\,h \cdot 30\frac{€}{h} = 240\ €$$

Esempio 5.

Per un banchetto di 120 persone il cuoco, con la giacenza disponibile, può fornire agli ospiti porzioni da 80 grammi di pasta. Se dovesse servire, con la stessa quantità di pasta, 125 persone quanto sarebbe il peso delle porzioni.

Caso: proporzionalità inversa (+-)

Costante proporzionalità: quantità di pasta disponibile → $(120 \cdot 80)$ g di pasta

Esempio 6.

Daniele, Giulio, Mirko e Federico, classe 3B 2005 seconda fila, progettano, a scuola durante una mate ora, una festa a casa di Giulio. Spendono per questo 60,00 euro per cibi e "bevande". Per mantenere una buona disponibilità di vivande se intendessero far partecipare alla festa altri 4 fidati compagni quanto dovrebbero spendere?

Caso: proporzionalità diretta (++)

Costante proporzionalità: spesa pro capite → 15 euro/persona

(Ai miei nuovi alunni - 20.9.2005)

Tre semplice al computer

C16 =B16*C10

Tre semplice

latte	formaggio
[l]	[kg]
84	7
x	12

Diretto

++

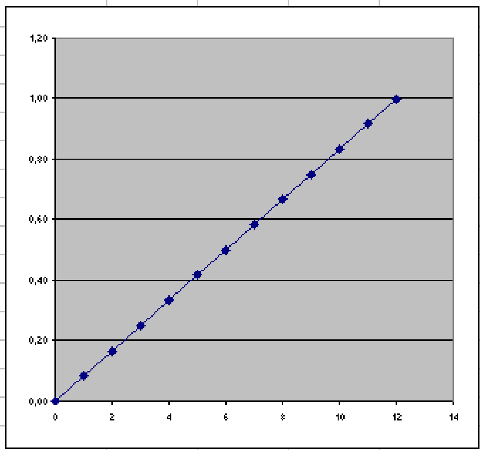
x : 84 = 13 : 7

x= 144 [l]

k= 0,08333 Kg formaggio/Litro latte

Legge y = kx

Latte	Formaggio
x	y
[l]	[kg]
0	0,00
1	0,08
2	0,17
3	0,25
4	0,33
5	0,42
6	0,50
7	0,58
8	0,67
9	0,75
10	0,83
11	0,92
12	1,00



C16 =C10/B16

Tre semplice

peso carico	n. viaggi
[q]	[n]
30	6
18	x

Inverso

+-

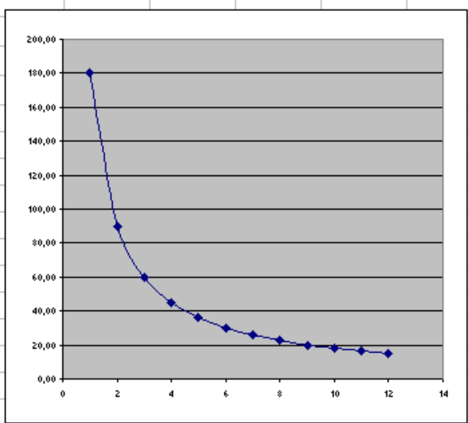
x : 14 = 22 : 28

x= 10 [n]

k= 180 Peso da trasportare [q]

Legge y = k/x

Viaggi	Peso carico
x	y
	[q]
1	180,00
2	90,00
3	60,00
4	45,00
5	36,00
6	30,00
7	25,71
8	22,50
9	20,00
10	18,00
11	16,36
12	15,00



Link

- it.wikipedia.org/wiki/Proporzionalit%C3%A0_(matematica)
- www.math.it/formulario/proporzioni.htm
- Gli oggetti matematici (macosa.dima.unige.it/om/) – Università di Genova
- macosa.dima.unige.it/om/voci/proporz/proporz.htm
- macosa.dima.unige.it/om/voci/propinv/propinv.htm

In lingua inglese

- www.edhelper.com/ratios.htm (da vedere e da usare...)
- www.math.com/school/subject1/lessons/S1U2L2GL.html
- www.shodor.org/UNChem/math/r_p/index.html

Keywords

Matematica, aritmetica, rapporto, quoziente, proporzione, percentuale, scala, scala grafica, riduzione, ingrandimento, medio proporzionale, proporzionalità, diretta, inversa, tre semplice, tre composto, ripartizione

Math, Arithmetic, ratio, proportion, quotient, percentage ratio, Proportionality, Percentage, Math solved exercises

Matemática, Aritmética, Proporción, Porcentaje

Mathématique, Arithmétique, Proportion, Pourcentage

Mathematik, Arithmetik, das Verhältnis, Prozent

Arabic: كَمِيَّة، حَجْم، عَدَد
Chinese 比例
Czech: poměr
Danish: forhold
Dutch: verhouding
Estonian: (õige) vahekord
Finnish: suhde
Greek: αναλογία
Hungarian: arány
Icelandic: hlutfall
Indonesian: perbandingan
Japanese: 割合
Korean: (양·크기·수 따위의) 비, 비율
Latvian: proporcija; attiecība; samērs
Lithuanian: proporcija, santykis
Norwegian: forhold
Polish: proporcja
Portuguese: proporção
Romanian: proporţie
Russian: пропорция
Slovak: pomer, podiel
Slovenian: razmerje
Swedish: proportion
Turkish: oran, nisbet