Calcolo delle probabilità – Calcolo combinatorio

Principio fondamentale del calcolo combinatorio

Se una procedura può essere realizzata in n_1 modi diversi e se, dopo questa procedura, una seconda procedura può essere realizzata in n_2 modi diversi e così di seguito, allora il numero totale di modi di realizzazione della procedura è dato dal prodotto dei diversi modi possibili.

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots$$

Esempio

Lanciando contemporaneamente una moneta e un dado, quanti sono tutti gli esiti possibili?

$A(T; C)$ -> 2 eventi possibili
$B(1; 2; 3; 4; 5; 6)$ -> 6 eventi possibili
$AxB = 2 \cdot 6 = 12\ esiti\ possibili$

Notazione fattoriale

In matematica ricorre l'uso del prodotto degli interi positivi da 1 a n compreso.
Con **n!** si indica in matematica il fattoriale, ovvero il prodotto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ di tutti i numeri da 1 fino ad n.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

E' conveniente definire $0! = 1$.

Disposizioni e permutazioni

Il numero di disposizioni di *n* oggetti presi *k* alla volta è dato dal rapporto tra il fattoriale di *n* e il fattoriale della differenza tra *n* e *k*.

$$D(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio

Trova il numero di disposizioni disponendo di 4 palline di diverso colore e prendendole due a due.

$$D(4, 2) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12 \text{ disposizioni}$$

Nel caso in cui $n = k$ si ha $P(n) = D(n, n) = n!$

Esempio

Trova il numero di disposizioni disponendo di 3 palline di diverso colore.

$$P(3) = D(3, 3) = n! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ disposizioni}$$

Permutazioni con ripetizioni

Il numero di permutazioni di *n* oggetti di cui n_1 uguali tra di loro e n_2 uguali tra di loro e così di seguito è dato dal rapporto tra il fattoriale di *n* e il prodotto dei fattoriali dei diversi *k* gruppi di oggetti uguali.

$$P(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Esempio

Trova il numero di permutazioni disponendo di 5 oggetti, tre di colore rosso e due di colore verde.

$$P(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10 \text{ permutazioni}$$

Coefficiente binomiale

Il coefficiente binomiale di ***n*** su ***k***, con ***n*** e ***k*** numeri naturali e ***(k <= n)***, è dato dalla formula seguente (che si legge “n su k”).

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{0}{0} = 1$$

Combinazioni

Il numero di combinazioni di n oggetti presi a k a k è dato dalla seguente formula.

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Esempio

Trova il numero di combinazioni ottenibili disponendo di 6 carte raggruppandole a tre a tre.

$$C(6,3) = \binom{8}{3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20 \text{ combinazioni}$$

Distribuzione binomiale

La distribuzione bernoulliana o binomiale fornisce la probabilità che un evento con probabilità ***p*** di successo, si verifichi esattamente ***k*** volte su ***n*** prove totali. Deve trattarsi di prove ripetute e indipendenti che abbiano due esiti (successo e insuccesso).

$$p(k;\ n,p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Esempio

Calcola, se si lancia 10 volte una moneta (n=10), la probabilità che escano esattamente 2 teste (k=2; dove la probabilità di ogni lancio è ovviamente p(T) = p(C) = 1/2 = 0,5).

$$p\left(2; 10, \frac{1}{2}\right) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-2} = \frac{10!}{2!\,8!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{256} = \frac{45}{1024} \approx 0{,}04$$

Estrazione casuale senza ripetizioni

In un’estrazione casuale, senza ripetizioni, di un campione di ***n*** oggetti da un'urna contenente in tutto ***N*** oggetti, di cui un numero ***pa*** di oggetti di tipo A e un numero ***pb*** di oggetti di tipo B, la probabilità di ottenere una dato numero di oggetti di dipo A **a** e **(n-a)** oggetti di tipo B è data dal rapporto:

$$p = \frac{\binom{pa}{a}\binom{N-pa}{n-a}}{\binom{N}{n}}$$

Esempio

Calcola, data un'urna con 10 palline, di cui 6 bianche e 4 nere, estraendo un campione casuale di 5 palline dall'urna, la probabilità di ottenere 3 palline bianche e 2 nere.

$$p = \frac{\binom{6}{3}\binom{10-6}{5-3}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{\frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{4!}{4!\,4!}}{\frac{10!}{5!\,5!}} = \frac{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21} \approx 0{,}47$$