# L’elevamento a potenza

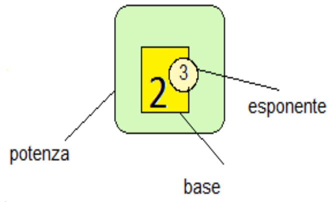
Come con la moltiplicazione si abbrevia la scrittura di un’addizione tra addendi uguali, così è possibile scrivere in maniera concisa una moltiplicazione tra fattori tutti uguali.

$a+n=a+\underbrace{(1\ +1+1+\ \dots+1)}_{n\ addendi}$ $\qquad$ $3+4=3+1+1+1+1=7$

$a\cdot n=\underbrace{(a\ +a+a+\ \dots+a)}_{n\ addendi}$ $\qquad$ $2+\ 2+2=2\cdot 3=6$

$a^n\ =\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot\ \dots\cdot a)}_{n\ fattori}$ $\qquad$ $2\cdot 2\cdot 2\ =2^3=8$

La moltiplicazione tra fattori uguali tra di loro, si indica scrivendo il fattore, che assume il nome di **base**, una sola volta e ponendo alla sua destra, in alto e in piccolo, l’indicazione di quanti sono i fattori. Questo numero, posto come apice a destra della base, è detto **esponente**. L’operazione è detta **elevamento a potenza** e il risultato è detto **potenza**.




*L'elevamento a potenza è un’operazione che associa a due numeri qualsiasi, dati in un dato ordine e detti base ed esponente, un terzo numero, detto potenza, che si ottiene moltiplicando la base per sé stessa tante volte quante ne indica l'esponente.*

*Matematica e storia*
*La parola esponente venne coniata nel 1544 da Michael Stifel (1487, 1567) .*
*Alla fine del XVI secolo, Jost Bürgi (1552, 1632) utilizza i numeri romani come esponente.*
*La notazione come la conosciamo oggi venne introdotta da René Descartes (1596, 1650), nel testo La Géométrie nell’introduzione al Libro I.*

Il calcolo della potenza si esegue, quindi, come prodotto di tanti fattori uguali alla base quanti ne indica l'esponente. In generale:

$$a^n\ =\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot\ \dots\cdot a)}_{n\ fattori}$$

Le potenze scritte nella forma $a^n$ si leggono come “*elevato alla enne*” o più semplicemente “*alla enne*”.

*Matematica e tecnologia*
*Nei fogli di calcolo e nei linguaggi di programmazione per le potenze si usa il simbolo ^, di accento circonflesso.*
2^3 corrisponde $2^3$.

Alcuni esponenti hanno un nome particolare.
L’esponente due è indicato come **al quadrato** e l’esponente tre come **al cubo**.
Un numero alla seconda rappresenta l’**area di un quadrato** che abbia per lato quel valore.
Un numero alla terza rappresenta il **volume di un cubo** che abbia per spigolo quel valore.

**!** Presta attenzione a non confondere il quadrato di un numero con il suo doppio e il cubo con il suo triplo.

| | **si legge** | **oppure** |
|---|---|---|
| $\mathbf{3^2=3\cdot 3=9}$ | tre alla seconda | tre al quadrato |
| $\mathbf{2^3=2\cdot 2\cdot 2=4\cdot 2=8}$ | due alla terza | due al cubo |
| $\mathbf{3^4=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=9\cdot 9=81}$ | tre alla quarta | tre elevato alla quarta |

Con base ed esponente numeri naturali, l'elevamento a potenza è un'operazione interna all'insieme dei numeri naturali ($a, n \in \mathbb{N} \rightarrow a^n \in \mathbb{N}$), discendendo dall'operazione di moltiplicazione. L'insieme dei numeri naturali ($\mathbb{N}$) è chiuso rispetto all'elevamento a potenza.

**!** Il base può essere un numero intero ($\mathbb{Z}$ ), razionale ($\mathbb{Q}$) o reale ($\mathbb{R}$) mentre l'esponente è un numero intero positivo.

Con il termine **tetrazione**, noto anche come hyper-4, ci si riferisce a potenze reiterate di una serie di esponenti.

$$2^{2^{2^2}} = 2^{[2^{(2^2)}]} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65.536$$

Per il calcolo si valuta la potenza dall'alto in basso o da destra a sinistra. Questa operazione pur consentendo la scrittura di numeri molto grandi non trova applicazioni pratiche.

*Matematica e storia*
*Il matematico francese Nicolas Chuquet (Paris, 1445 – Lyon, 1488) inventò una propria forma di notazione per i concetti algebrici e le potenze e attribuì un nome ai grandi numeri.*

# Potenze particolari

I seguenti sono una serie di casi particolari dell'elevamento a potenza.
La giustificazione di alcuni di essi richiede altre conoscenze e sarà successiva.

*Qualsiasi potenza con esponente 1 è la base.* $\boldsymbol{a^1 = a \rightarrow a = a^1}$

Ricorda che se $a^1 = a$, allora $a = a^1$.
*Esempio:* $2^1 = 2$ $3^1 = 3$ $4^1 = 4$

*Qualsiasi potenza con base 1 è 1.*
$1^n = 1$

*Esempio:* $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

*Qualsiasi potenza con base 0 ed esponente maggiore di 0 è 0.* $\boldsymbol{0^n = 1 \quad \forall n > 0}$

*Esempio:* $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ $0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

*Qualsiasi potenza con esponente 0 è pari a 1.* $\boldsymbol{a^0 = 1 \quad \forall a \neq 0}$

*Esempio:* $1^0 = 1$ $2^0 = 1$ $13^0 = 1$

*Le potenze di 10 si ottengono scrivendo dopo l'unità tanti zeri quanti ne indica l'esponente.*

$10^n = 1 \underbrace{0 \ldots}_{n\ volte}$

*Esempio:* $10^1 = 1$ $10^2 = 100$ $10^3 = 1000$

*La potenza $0^0$ è priva di significato.*

Alcuni autori pongono secondo il contesto $0^0$=1.

# Proprietà delle potenze

L'elevamento a potenza gode di proprietà la cui conoscenza, come per quelle delle operazioni fondamentali, ne semplifica il calcolo o lo abbrevia.

## Prodotto di potenze con la stessa base

Dall'esempio si può dedurre una proprietà generale per il prodotto di potenza di uguale base.

$$2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\ fattori} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4\ fattori} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{7\ fattori} = 2^7$$

*Il prodotto di potenze aventi la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.*

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

*Esempio:* $3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6\ perché\ 3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^6$

## Quoziente di potenze con la stessa base

Dall'esempio si può dedurre una proprietà generale.

$$2^6 : 2^3 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{6\ fattori} : \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3\ fattori} = 2^3 \qquad (2:2) = 1$$

*Il quoziente di potenze aventi la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.*

$a^m : a^n = a^{m-n}$

*Esempio:* $3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2\ perché\ 3^4 : 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}) : (\cancel{3} \cdot \cancel{3}) = 3^2$

## Potenza di una potenza

Dall'esempio, dove è applicata la definizione di elevamento a potenza, si può dedurre una proprietà generale per una potenza a sua volta elevata a un dato esponente e detta potenza di una potenza.

$$(2^3)^2 = \left(\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\ fattori}\right)^2 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\ fattori} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\ fattori} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{6\ fattori} = 2^6$$

*La potenza di una potenza è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.*

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

*Esempio:* $(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6\ perché\ (5 \cdot 5)^3 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) = 5^6$

## **Prodotto di potenze** con lo **stesso esponente**

In questo caso, dall'esempio, si deduce come la moltiplicazione di potenze con lo stesso esponente porti allo stesso risultato se si esegue prima il prodotto delle basi e poi se esegua l'elevamento a potenza. Si può sfruttare anche la proprietà commutativa della moltiplicazione per mostrarne la validità.

$3^2 \cdot 2^2 = (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) = (3 \cdot 2)^2 = 6^2$

*Il prodotto di potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per base il prodotto delle basi.*

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

*Esempio:* $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 \; perché \; 2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$

## **Quoziente di potenze** con lo **stesso esponente**

In questo caso, dall'esempio, si deduce come la divisione di potenze con lo stesso esponente porti allo stesso risultato se si esegue prima il quoziente delle basi e poi se esegua l'elevamento a potenza. Si può sfruttare anche la proprietà invariantiva della divisione per mostrarne la validità.

$12^2 : 4^2 = 144 : 16 = 9$

$12^2 : 4^2 = (12 \cdot 12) : (4 \cdot 4) = [(12 : 4) \cdot (12 : 4)] : [(4 : 4) \cdot (4 : 4)] = 3 \cdot 3 = 3^2$

*Il quoziente di potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per base il quoziente delle basi.*

$a^m : b^m = (a : b)^m$

*Esempio:* $6^2 : 3^2 = (6 : 3)^2 = 2^2 \; perché \; 6^2 : 3^2 = \frac{\cancel{6}^{2} \cdot \cancel{6}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 4$

## **Quoziente di potenze** con **esponente zero**

La proprietà del quoziente di potenze con lo stesso esponente che prevede la differenza degli esponenti quale abbreviazione del calcolo, è utile a comprendere il significato delle potenze che abbiano una base diversa da zero e l'esponente zero.

In questi casi la potenza vale sempre 1.

$a^0 = 1 \quad \forall a \neq 0$

$5^2 : 5^2 = 25 : 25 = 1$

$5^2 : 5^2 = 5^{2-2} = 5^0 = 1$

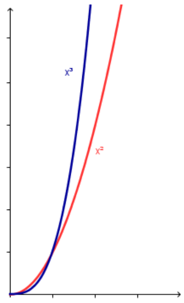
Facendo ricorso alla legge di Hankel si giunge allo stesso risultato. Il principio di permanenza delle regole del calcolo stabilisce, infatti, che se in matematica si vuole generalizzare un concetto oltre la sua originaria definizione, bisogna scegliere, tra tutti i modi possibili, quello che permette di conservare immutate le regole del calcolo nel più esteso numero dei casi.

*Matematica e storia*
*Herman Hankel (Halle, 14/2/1839 – Schramberg, 20/8/1873), matematico tedesco, fu tra i primi ad attribuire ad attribuire all'India le origini del nostro sistema di numerazione.*
*it.wikipedia.org/wiki/Hermann_Hankel*

# Funzione esponenziale

È possibile rappresentare graficamente le funzioni esponenziali $y = a^x$ su di un piano cartesiano.

Riportando le coppie di punti $(x, a^x)$ si ottengono delle curve sempre più ripide quanto maggiore è il valore di $x$.
Per ottenere i punti della curva puoi utilizzare le tavole numeriche e i valori dei quadrati e dei cubi dei primi numeri.



*Matematica e scienze*
*In biologia i microorganismi hanno una crescita esponenziale in presenza di cibo sufficiente. Un primo organismo si divide in due, questi a loro volta divengono quattro e così via.*

# Potenze del 10

Particolare importanza assumono le potenze del numero 10, permettendo di semplificare la scrittura di numeri molto grandi e molto piccoli.

Tradurre una potenza di dieci in numero è semplice. Si può verificare che il numero delle unità di ogni esponente è uguale al numero di zeri del risultato.

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1000$$

L'esponente zero della prima potenza di dieci è pari all'unità ($10^0 = 1$).

Per le potenze di dieci con esponente negativo, il numero delle unità di ogni esponente indica il numero di zeri che precedono l'unità.

$$10^{-1} = 0{,}1$$

$$10^{-2} = 0{,}01$$

$$10^{-3} = 0{,}001$$

I numeri di un qualsiasi sistema di numerazione possono essere scritti quindi in **forma polinomiale** usando le potenze della base.

Nel sistema decimale la base è 10 e si usano potenze del 10.

Occorre seguire la convenzione secondo la quale le cifre decimali, poste a destra della virgola, sono scritte con esponente negativo pari alla posizione occupata dopo la virgola.

Esempi

$$2325 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$$

$$2325 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

$$21{,}607 = 2 \cdot 100 + 1 + 6 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{1000}$$

$$21{,}607 = 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-3}$$

Alcune potenze del 10 sono utilizzate come prefissi del sistema internazionale di misura (*SI = International System of Units*). I prefissi assumono nomi particolari.

Sono di seguito riportati i nomi assunte dalle potenze di 10 che costituiscono prefisso internazionale e la data di adozione nel sistema.

| Nome | simbolo | fattore | | Introdotto nel SI il |
|---|---|---|---|---|
| yotta | **Y** | $10^{24}$ | 1.000.000.000.000.000.000.000.000 | 1991 |
| zetta | **Z** | $10^{21}$ | 1.000.000.000.000.000.000.000 | 1991 |
| exa | **E** | $10^{18}$ | 1.000.000.000.000.000.000 | 1991 |
| peta | **P** | $10^{15}$ | 1.000.000.000.000.000 (un milione di miliardi) | 1975 CGMP (*) |
| tera- | **T** | $10^{12}$ | 1.000.000.000.000 | 1960 confermato |
| giga- | **G** | $10^{9}$ | 1.000.000.000 (un miliardo) | 1960 confermato |
| mega- | **M** | $10^{6}$ | 1.000.000 | 1960 confermato |
| chilo- kilo- | **k** | $10^{3}$ | 1.000 | 1975 CGMP |
| etto- | **h** | $10^{2}$ | 100 | 1975 CGMP |
| deca- | **da** | $10^{1}$ | 10 | 1975 CGMP |
| unità- | | $10^{0}$ | 1 | |
| deci- | **d** | $10^{-1}$ | 0,1 (1/10) | 1975 CGMP |
| centi- | **c** | $10^{-2}$ | 0,01 (1/100) | 1975 CGMP |
| milli- | **m** | $10^{-3}$ | 0,001 (1/1.000) | 1975 CGMP |
| micro- | **µ** | $10^{-6}$ | 0,000.001 (1/1.000.000) | 1960 confermato |
| nano- | **n** | $10^{-9}$ | 0,000.000.001 (un miliardesimo) (1/1.000.000.000) | 1960 confermato |
| pico- | **p** | $10^{-12}$ | 0,000.000.000.001 | 1960 confermato |
| femto- | **f** | $10^{-15}$ | 0,000.000.000.000.001 (un milionesimo di miliardesimo) | 1964 |
| atto- | **a** | $10^{-18}$ | 0,000.000.000.000.000.001 | 1964 |
| zepto | **z** | $10^{-21}$ | 0,000.000.000.000.000.000.001 | 1991 |
| yocto | **y** | $10^{-24}$ | 0,000.000.000.000.000.000.000.001 | 1991 |

(*) CGMP: General Conference of Weights and Measures

Ci sono altre potenze del 10 con attribuito un nome e che non sono usate dal SI come prefissi.

| Nome | simbolo | fattore | |
|---|---|---|---|
| miria | **ma** | $10^{4}$ | 10.000 |
| Angstrom | **Å** | $10^{-10}$ | 0,000.000.000.1 |

Approfondimenti: it.wikipedia.org/wiki/Sistema_internazionale

# Notazione esponenziale e forma standard

La notazione scientifica o notazione esponenziale è usata per esprimere in modo conciso numeri molto grandi o molto piccoli come prodotti di un coefficiente $\boldsymbol{h}$ per una potenza, positiva o negativa, di 10 ($\boldsymbol{h \cdot 10^{\pm n}}$). Questo tipo di notazione, usata in fisica e chimica ad esempio, consente di esprimere diverse grandezze senza utilizzare lunghe sequenze di zeri e consente di evitare ambiguità linguistiche che differenziano diversi paesi che attribuiscono alla stessa parola valori diversi (es. bilione europeo $10^9$ contro $10^{12}$ in USA).

Per convenzione, il numero $h$ deve essere costituito da una sola cifra intera seguita da una o più cifre decimali.

Un numero nel formato nel formato $h \cdot 10^{\pm n}$ è rappresentato nel formato scientifico o in notazione esponenziale.

Il numero 123.000.000 può essere rappresentato nella notazione scientifica come $1{,}23 \cdot 10^8$, mentre il numero 0,0123 può essere rappresentato come $1{,}23 \cdot 10^{-2}$.

È questa la notazione impiegata anche dalle calcolatrici o dai fogli di calcolo per rappresentare valori che non rientrano per esteso sul visore o nelle celle.

Sono parimenti valide, ma non convenzionali, le seguenti scritture:

$123.000.000 = 12{,}30 \cdot 10^7$

$123.000.000 = 123{,}00 \cdot 10^6$

$0{,}0123 = 0{,}123 \cdot 10^{-1}$

Per scrivere un numero in formato scientifico si sposta la virgola a sinistra, se il numero è grande, o a destra, se il numero è piccolo, fino a trovare un numero $\boldsymbol{h}$ inferiore a 10. Il numero degli spostamenti è l'esponente $\boldsymbol{+n}$ o $\boldsymbol{-n}$ di 10 da utilizzare nel formato $\boldsymbol{h \cdot 10^{\pm n}}$.
Per trasformare un numero dal formato scientifico nel valore decimale corrispondente si segue la regola inversa.

# Ordine di grandezza di un numero

I numeri naturali che abbiano come ultime cifre degli zeri possono essere scritti come prodotto delle restanti cifre per una potenza di 10 che abbia come esponente il numero di zeri che aveva il numero.

$\mathbf{2000 = 2 \cdot 10^3}$

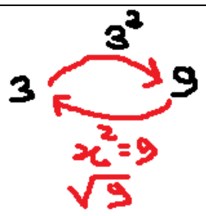
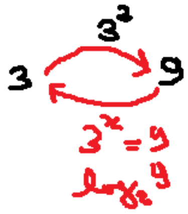
Ogni numero naturale è, inoltre, compreso tra due potenze di dieci contigue.
$10^3 < 2000 < 10^4$. In questo caso la potenza più vicina al numero dato è $10^3$.
$10^3 < 7000 < 10^4$. In questo caso la potenza più vicina al numero dato è $10^4$.

*Si definisce ordine di grandezza di un numero la potenza di 10 che più si avvicina a quel numero.*

È quindi introdotta una approssimazione ma questa serve per avere proprio un'idea o ordine di grandezza con cui operare.

# Operazioni inverse dell'elevamento a potenza

L'elevamento a potenza ha due operazioni inverse secondo che si cerchi la base noti la potenza e l'esponente o che si ricerchi l'esponente noti la potenza e la base.

| | |
|---|---|
|  |  |
| Conoscendo la potenza e l'esponente è possibile risalire alla base utilizzando l'operazione di estrazione di radice. | Conoscendo la potenza e la base è possibile risalire all'esponente utilizzando l'operazione di logaritmo. |
| $4^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \sqrt[2]{16} = \sqrt{16} \xrightarrow{x^2=16} 4$ | $4^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \log_4 16 \xrightarrow{4^x=16} 2$ |
| $2^3 = 8 \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{8} \xrightarrow{x^3=8} 2$ | $2^3 = 8 \quad \rightarrow \quad \log_2 8 \xrightarrow{2^x=8} 3$ |

## Estrazione di radice

*È detta radice aritmetica ennesima (di indice n) di un numero reale a, un secondo numero reale (se esiste), b, tale che la potenza ennesima di questo sia uguale ad a.*

L'estrazione di radice si scrive $\sqrt[n]{a} = b$; *scrittura che equivale alla potenza* $b^n = a$.

Il numero $a$ che compare sotto il segno di radice è detto **radicando**.

Il numero n, omesso per il valore 2, è detto indice della **radice**.

La radice con indice 2 prende il nome di **radice quadrata**.

La radice con indice 3 prende il nome di **radice cubica**.

Esempio: $2^3 = 8$ $\qquad x^3 = 8$ $\qquad$ *da dove* $\qquad \sqrt[3]{8} = 2$

L'operazione di estrazione radice non è interna a ℕ!
L'insieme dei numeri naturali (ℕ) non è chiuso rispetto all'estrazione di radice (I).

## Logaritmo

*Dicesi logaritmo di un numero, in una data base, l'esponente cui si deve elevare la base per ottenere il numero dato.*

Se fra tre numeri $a > 1$, $b > 0$ e $x$ intercede una relazione esponenziale del tipo $a^x = b$

***x* è detto logaritmo in base *a* di *b***, e si scrive: $\log_a b = x$

Esempio: $2^3 = 8$ $\qquad 2^x = 8$ $\qquad$ *da dove* $\qquad \log_2 8 = 3$

L'operazione di logaritmo non è interna a ℕ!
L'insieme dei numeri naturali (ℕ) non è chiuso rispetto al logaritmo.

*Matematica e storia*
*I logaritmi furono proposti nel 1614 da John Napier (Merchiston Castle, 1550 – Edimburgo, 4/4/1617), matematico, astronomo e fisico scozzese.*

# Espressioni con le potenze

Un'espressione aritmetica può prevedere l'operazione di elevamento a potenza.

In questo caso prima di eseguire qualsiasi altra operazione si svolgono le potenze. Nelle espressioni si conviene di utilizzare, sempre e dove possibile, le proprietà delle potenze e di mantenere la notazione con l'esponente sino a che non si è certi che non vi sono proprietà applicabili.

Si prosegue il calcolo con le regole che conosci e nel rispetto delle eventuali parentesi.

L'esempio che segue riporta un'espressione aritmetica con le potenze da svolgere prima di tutte le altre operazioni. Non vi sono casi in cui serva applicare le proprietà delle potenze.

$(2^3 + 2^2 \cdot 5^1 - 3^0 \cdot 2^3 + 7) : (5^2 - 4^2) =$ Ricorda che $a^1 = a$ e che $a^0 = 1 \; con \; a \neq 0$

$$= \left(\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \; fattori} + \underbrace{2 \cdot 2}_{2 \; fattori} \cdot 5 - 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \; fattori} + 7\right) : \left(\underbrace{5 \cdot 5}_{2 \; fattori} - \underbrace{4 \cdot 4}_{2 \; fattori}\right) =$$

$= (8 + 4 \cdot 5 - 1 \cdot 8 + 7) : (25 - 16) =$

$= (8 + 20 - 8 + 7) : 9 =$

$= 27 : 9 = 3$

Nell'esempio seguente si utilizzando le proprietà delle potenze, sino quasi al termine dello svolgimento, con indubbi benefici per il calcolo.

$(3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^3) : (3^3 \cdot 3)^2 =$ Ricorda che $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$= 3^{2+5+3} : (3^{3+1})^2 =$

$= 3^{10} : (3^4)^2 =$ Ricorda che $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$= 3^{10} : 3^{4 \cdot 2} =$

$= 3^{10} : 3^8 =$ Ricorda che $a^m : a^n = a^{m-n}$

$= 3^{10-8} = 3^2 = 9$

In questo secondo esempio si presentano casi diversi.
Si applicano dove possibile le proprietà e negli altri casi si eseguono per prime le potenze.

$\{2 + (3 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 3^2 - 3) : [5 \cdot (2^6 : 2^4 \cdot 3 - 5^2 \cdot 5^2 : 5^3 \cdot 2) - (2^2)^3 : 2^3]\} : [2 \cdot (5^2 : 5)] =$
$= \{2 + (3 \cdot 25 - (2 \cdot 3)^2 - 3) : [5 \cdot (2^{6-4} \cdot 3 - 5^{2+2} : 5^3 \cdot 2) - 2^{2 \cdot 3} : 2^3]\} : [2 \cdot 5^{2-1}] =$
$= \{2 + (75 - 6^2 - 3) : [5 \cdot (2^2 \cdot 3 - 5^4 : 5^3 \cdot 2) - 2^6 : 2^3]\} : [2 \cdot 5^1] =$
$= \{2 + (75 - 36 - 3) : [5 \cdot (4 \cdot 3 - 5^{4-3} \cdot 2) - 2^{6-3}]\} : [2 \cdot 5] =$
$= \{2 + (39 - 3) : [5 \cdot (12 - 5^1 \cdot 2) - 2^3]\} : 10 =$
$= \{2 + 36 : [5 \cdot (12 - 5 \cdot 2) - 8]\} : 10 =$
$= \{2 + 36 : [5 \cdot (12 - 10) - 8]\} : 10 =$
$= \{2 + 36 : [5 \cdot 2 - 8]\} : 10 =$
$= \{2 + 36 : [10 - 8]\} : 10 =$
$= \{2 + 36 : 2\} : 10 =$
$= \{2 + 18\} : 10 =$
$= 20 : 10 = 2$

# Potenze con esponente negativo

Compaiono nei calcoli anche potenze con esponente negativo. Questa occorrenza può già essere resa comprensibile utilizzando le conoscenze delle proprietà delle operazioni e delle potenze.

Dovendo eseguire $(2^2 : 2^3)$, potremmo applicare le proprietà del quoziente di potenze con la stessa base.

$2^2 : 2^3 = 2^{2-3} = 2^{-1}$

Dovendo eseguire $(2^2 : 2^3)$ potremmo, in alternativa, applicare la proprietà invariantiva della divisione nel seguente modo.

$$2^2 : 2^3 = 4 : 8 = 2 : 4 = 1 : 2 = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad da\ cui \quad \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

Si tratta quindi di una convenzione di scrittura che già hai visto per le potenze del 10.

Per le potenze di dieci con esponente negativo, il numero delle unità di ogni esponente indica il numero di zeri che precedono l'unità.

$$10^{-1} = 1:10 = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$10^{-2} = 1:10^2 = 1:100 = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$10^{-3} = 1:10^3 = 1:1000 = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

*Potenze con esponente negativo e base diversa da zero sono pari a una potenza che ha come base l'inverso della base e come esponente lo stesso esponente ma positivo.*

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Esempi

$$2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} \qquad 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad 3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

# Potenze "famose"

| Nome | | |
|---|---|---|
| googol | $10^{100}$ | *Il nome Googol è attribuito al matematico americano Edward Kasner (2/4/1878 – 7/1/1955) nel 1938 nel suo libro Matematica e immaginazione, per illustrare la differenza tra un numero enorme e l'infinito. Lo coniò il nipote di Kasner, Milton Sirotta all'età di nove anni. Il motore di ricerca Google usa una distorsione di questa potenza particolare del 10 e lo usa per denominare la rete dei suoi server come 1e100.net in notazione scientifica.* |
| googolplex | $10^{10^{100}}$ | *Sempre introdotto da Edward Kasner.* |
| identità di Eulero | $e^{i\pi} + 1 = 0$ | *Compare in una pubblicazione di Eulero nel 1748.*<br>*La potenza ha come base e, la base dei logaritmi naturali, e come esponente il prodotto dell'unità immaginaria i, numero complesso il cui quadrato è – 1, e π, rapporto fra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.* |