

Poligoni

Un **poligono** è una linea spezzata, semplice e chiusa.

I **lati** del poligono sono segmenti che costituiscono la linea spezzata.

I **vertici** del poligono sono gli estremi dei segmenti della spezzata.

Il **perimetro** di un poligono è la misura del suo contorno e si indica con il simbolo $2p$.

In un poligono il numero dei vertici, il numero dei lati e il numero degli angoli sono sempre uguali tra di loro.

Gli **angoli interni** di un poligono hanno per lati una coppia di lati consecutivi del poligono.

Gli **angoli esterni** di un poligono sono adiacenti al corrispondente angolo interno e hanno per lati un lato del poligono e il prolungamento del lato consecutivo.

La **somma degli angoli esterni** di un poligono è sempre un angolo giro (360°).

La **somma degli angoli interni** di un poligono varia secondo il numero dei lati:

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

La **diagonale** di un poligono congiunge due vertici non consecutivi dello stesso.

Il numero delle diagonali varia secondo il numero dei lati:

$$\text{numero diagonali} = \frac{n(n - 3)}{2}$$

Un poligono è **equilatero** quando i suoi lati sono tutti congruenti, hanno cioè la stessa misura.

Un poligono è **equiangolo** quando i suoi angoli sono tutti congruenti, hanno cioè la stessa ampiezza.

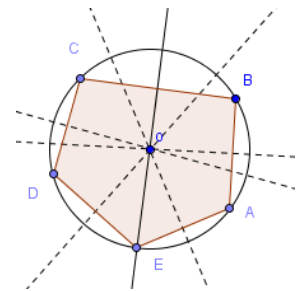
Un **poligono regolare** è contemporaneamente equilatero ed equiangolo.

Poligoni inscritti e circoscritti

Un poligono è **inscritto** in una circonferenza quando tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza.

La circonferenza è circoscritta al poligono.

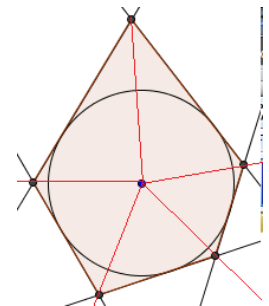
Quando un poligono è inscritto in una circonferenza, il centro della circonferenza coincide con il **circocentro** del poligono (punto d'incontro degli assi del poligono).



Un poligono è **circoscritto** in una circonferenza quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.

La circonferenza è inscritta al poligono.

Quando un poligono è circoscritto in una circonferenza, il centro della circonferenza coincide con l'**incentro** del poligono (punto d'incontro delle bisettrici degli angoli del poligono).

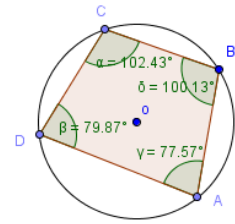


Condizioni d'inscrittibilità

Un poligono è inscrittibile in una circonferenza se gli assi dei suoi lati s'incontrano in un unico punto, detto circocentro del poligono.

Un quadrilatero è inscrittibile in una circonferenza se la somma dell'ampiezza degli angoli opposti è un angolo piatto (180°); sono supplementari.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$



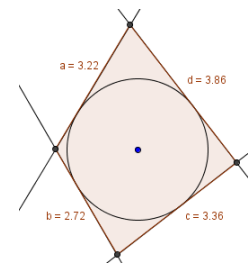
I rettangoli, i quadrati e i trapezi isosceli sono sempre inscrittibili in una circonferenza.

Condizioni di circoscrittibilità

Un poligono è circoscrittibile in una circonferenza se le bisettrici dei suoi angoli s'incontrano in un unico punto, detto incentro del poligono.

Un quadrilatero è circoscrittibile in una circonferenza se la somma delle misure dei lati opposti sono uguali.

$$a + c = b + d$$



L'**area di un poligono irregolare circoscritto** a una circonferenza è data dal prodotto del semiperimetro per il raggio della circonferenza cui il poligono è circoscritto (vedi avanti).

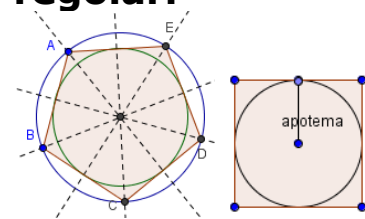
$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots = \frac{(b_1 + b_2 + b_3 + \dots) \cdot r}{2} \rightarrow \rightarrow \rightarrow S = p \cdot r$$

Inscrittibilità e circoscrittibilità dei poligoni regolari

In un poligono regolare circocentro e incentro coincidono.

Ogni poligono regolare, pertanto, ammette una circonferenza inscritta e circoscritta.

Il raggio della circonferenza inscritta è detto **apotema** del poligono e rappresenta la distanza di ogni lato dal centro.



Inscrittibilità e circoscrittibilità dei triangoli

Un triangolo è sempre inscrittibile in una circonferenza, esistendo per tutti i triangoli il circocentro.

Un triangolo è sempre circoscrivibile in una circonferenza, esistendo per tutti i triangoli l'incentro.

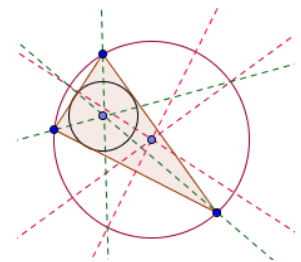
$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{raggio cerchio inscritto} = r = \frac{S}{p}$$

$$\text{raggio cerchio circoscritto} = R = \frac{abc}{4S}$$

Dove sono abc sono le misure dei lati del triangolo e S è la l'area del triangolo.



I **triangoli** sono sempre sia inscrivibili (circocentro) e circoscrivibili (incentro).

I **rettangoli** sono sempre inscrivibili (circocentro) ma non circoscrivibili.

I **rombi** sono sempre circoscrivibili (incentro) ma non inscrivibili.

I **trapezi isosceli** sono sempre inscrivibili (circocentro) in una circonferenza.

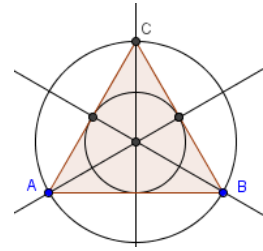
Poligoni regolari particolari

In un triangolo equilatero il raggio della circonferenza inscritta (apotema) è la terza parte dell'altezza del triangolo.

In un triangolo equilatero il raggio della circonferenza circoscritta è il doppio del raggio circonferenza inscritta (due terzi dell'altezza del triangolo).

$$a = r_{insc.} = \frac{1}{3}h \quad r_{circosc.} = 2r_{insc.} = \frac{2}{3}h$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \quad S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

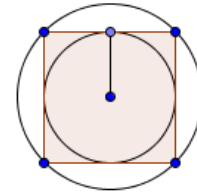


In un quadrato il raggio della circonferenza inscritta (apotema) è la metà del lato del quadrato.

In un quadrato il raggio della circonferenza circoscritta è la metà della diagonale del quadrato.

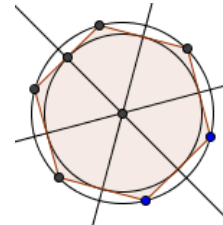
$$a = r_{insc.} = \frac{1}{2}l \quad r_{circosc.} = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}l\sqrt{2}$$

$$d = l\sqrt{2} \quad S = l^2$$



In un esagono regolare il raggio della circonferenza circoscritta è uguale al lato dell'esagono regolare.

$$r_{insc.} = l_{esagono} \quad S = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$



Numero fisso dei poligoni regolari

In un poligono regolare il rapporto tra l'apotema e il lato è un valore costante detto **numero fisso** (f).

$$f = \frac{a}{l}$$

Il numero fisso è caratteristico di ogni tipo poligono regolare.

Numero di lati	Nome poligono regolare	Numero fisso (f)	$\frac{n \cdot f}{2}$
3	Triangolo equilatero	0,28867	0,43301
4	Quadrato	0,5	1
5	Pentagono	0,68819	1,72048
6	Esagono	0,86602	2,59808
7	Ettagono	1,0383	3,63391
8	Ottagono	1,2071	4,82843
9	Ennagono	1,3737	6,18282
10	Decagono	1,5388	7,69421
11	Undecagono	1,7028	9,36564
12	Dodecagono	1,8660	11,9615
15	Pentadecagono	2,352	17,642

Area dei poligoni regolari

L'area di un poligono regolare è data dal prodotto del semiperimetro per l'apotema.

$$S = p \cdot a$$

$$S = \frac{n \cdot l}{2} \cdot l \cdot f = l^2 \cdot \frac{n \cdot f}{2}$$

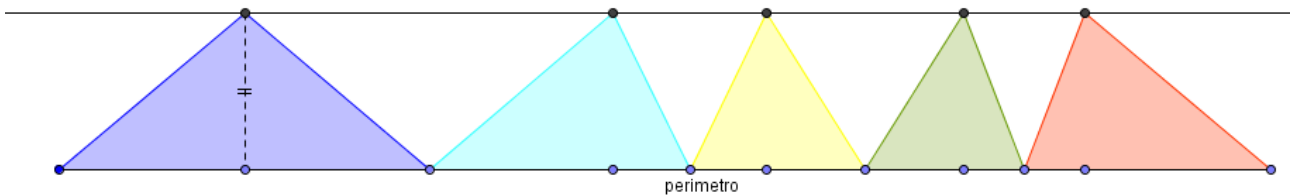
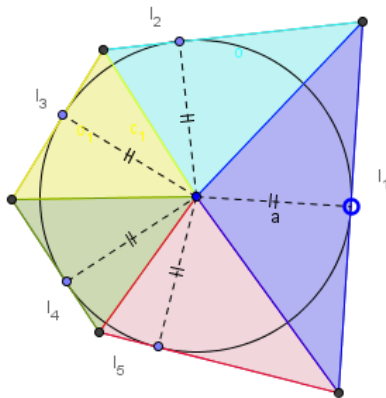
$$a = \frac{S}{p}$$

$$p = \frac{S}{a}$$

Area dei poligoni irregolari circoscritti











L'area di un poligono irregolare circoscritto a una circonferenza è data dal prodotto del semiperimetro per il raggio della circonferenza cui il poligono è circoscritto (tanti triangoli di pari altezza, il raggio della circonferenza, e la cui somma delle basi è il perimetro del poligono).

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots = \frac{(b_1 + b_2 + b_3 + \dots) \cdot r}{2} \rightarrow S = p \cdot r$$



Approfondimenti

Consulta i file Geogebra disponibili su UbiMath su questo argomento.

 Triangolo_PuntiNotevoli_UbiMath.ggb	 Poligono_Inscritto_UbiMath.ggb
 Poligono_Circoscritto_UbiMath.ggb	 Quadrilatero_Circoscritto_UbiMath.ggb
 Quadrilatero_Inscritto_UbiMath.ggb	 Quadrilatero_Inscritto02_UbiMath.ggb
 PoligonoRegolare_TriangoloEquilatero_UbiMath.ggb	 PoligonoRegolare_Quadrato_UbiMath.ggb
 PoligonoRegolare_Pentagono_UbiMath.ggb	 PoligonoRegolare_Esagono_UbiMath.ggb