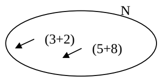
Le operazioni fondamentali

	simbolo	termini	risultato	proprietà
addizione	$+$	addendi	somma (totale)	commutativa associativa
sottrazione	$-$	termini (minuendo, sottraendo)	differenza (resto)	invariantiva
moltiplicazione	$\times$ $\cdot$ $*$	fattori (moltiplicando, moltiplicatore)	prodotto	commutativa associativa distributiva
divisione	: ÷ / \ %	dividendo e divisore	quoziente (quoto)	invariantiva distributiva

Addizione

L'addizione è l'operazione che dati due numeri qualsiasi, detti **addendi**, ne associa un terzo, detto **somma** o totale, ottenuto contando dopo il primo addendo tante unità quante sono quelle del secondo.

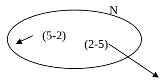
L'addizione **è interna a** ℕ!
L'insieme ℕ è chiuso rispetto all'addizione.



Sottrazione

La sottrazione è l'operazione che, a due numeri qualsiasi, con il primo maggiore del secondo, detti **minuendo** e **sottraendo**, ne associa un terzo, detto **differenza** o resto, ottenuto togliendo al primo tante unità quante sono quelle del secondo.

La sottrazione **non è interna a** ℕ!
L'insieme N non è chiuso rispetto alla sottrazione (ℤ).



Sottrazione con risultato in ℤ.
Per eseguire una sottrazione in cui il minuendo sia minore del sottraendo, si esegue la differenza dei due numeri (maggiore - minore) e si attribuisce al risultato il **segno negativo**.

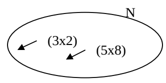
$$3+(-8) = 3-8 = -5 \quad (\text{perché } 8-3=5)$$

Moltiplicazione

La moltiplicazione è l'operazione che dati due numeri qualsiasi, detti **fattori**, ne associa un terzo, detto **prodotto**, ottenuto ripetendo tante volte le unità del primo quante sono le unità del secondo.

$$2\cdot 3 = \underbrace{2+2+2}_{3\ volte} = 6$$

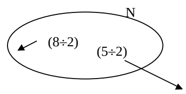
La moltiplicazione **è interna a** ℕ!
L'insieme ℕ è chiuso rispetto alla moltiplicazione.



Divisione

La divisione è l'operazione che dati due numeri qualsiasi, detti **dividendo** e **divisore**, ne associa un terzo, detto **quoziente** (risultato in ℕ e ℚ), ottenuto raggruppando in tante parti uguali quante ne richiede il divisore.

La divisione **non è interna a** ℕ!
L'insieme ℕ non è chiuso rispetto alla divisione (ℚ).



Se un numero a è multiplo di un numero b, diverso da 0, si dice ***quoto*** *o quoziente esatto* quel numero q che moltiplicato per b da come risultato a. La divisione non dà resto o meglio resto zero.

$$a = b\cdot q \qquad (12:3 = 4 \rightarrow 12 = 3\cdot 4)$$

Se i due numeri sono tali che a non sia multiplo di b, si dice ***quoziente*** *o quoziente approssimato* quel numero che moltiplicato per b dà un prodotto minore di a. La divisione dà, quindi, un resto r diverso da zero.

$$a = b\cdot q + r \quad (11:5 = 2\ resto\ 1 \rightarrow\ 2\cdot 5 + 1)$$

Proprietà commutativa dell'addizione
In un'**addizione** cambiando l'ordine degli **addendi** la **somma** non cambia.
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \quad \forall(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in\mathbb{N}$ $\qquad 2+3=3+2$

Proprietà associativa dell'addizione
Sostituendo a due o più **addendi** la loro **somma** il risultato della **addizione** non cambia
$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \quad \forall(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\in\mathbb{N}$ $\qquad 7+3+5=7+8=10+5=12+3$

Proprietà commutativa della moltiplicazione
In una **moltiplicazione** cambiando l'ordine dei **fattori** il **prodotto** non cambia.
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \quad \forall(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in\mathbb{N}$ $\qquad 2\cdot 3=3\cdot 2$

Proprietà associativa della moltiplicazione
Sostituendo a due o più **fattori** il loro **prodotto** il risultato della **moltiplicazione** non cambia.
$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \quad \forall(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\in\mathbb{N}$ $\qquad 2\cdot 5\cdot 7=10\cdot 7=2\cdot 35=14\cdot 5$

Proprietà distributiva della moltiplicazione
Per moltiplicare un numero per un'addizione o una sottrazione è possibile calcolare il prodotto del fattore dato per ciascuno dei termini e poi sommare o sottrarre.
$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \qquad \forall(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\in\mathbb{N}$
5 · (3 + 2) = (3 + 2) · 5 = (5 · 3) + (5 · 2) = 15 + 10 = 25
7 · (4 - 2) = (4 - 2) · 7 = (7 · 4) - (7 · 2) = 28 - 14 = 14

Proprietà invariantiva della sottrazione
Sommando o sottraendo uno stesso numero ai due termini di una sottrazione il risultato non cambia.
$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{c}) \qquad \forall(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\in\mathbb{N}$
(8 - 5) = (8 + 5) - (5 + 5) = 13 - 10 = 3
(8 - 5)= (8 - 5) - (5 - 5) = 3 - 0 = 3

Proprietà invariantiva della divisione
Dividendo o moltiplicando per uno stesso numero i due termini di una divisione il risultato non cambia.
$\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}:\boldsymbol{c}):(\boldsymbol{b}:\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}):(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \qquad \forall(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\in\mathbb{N}$

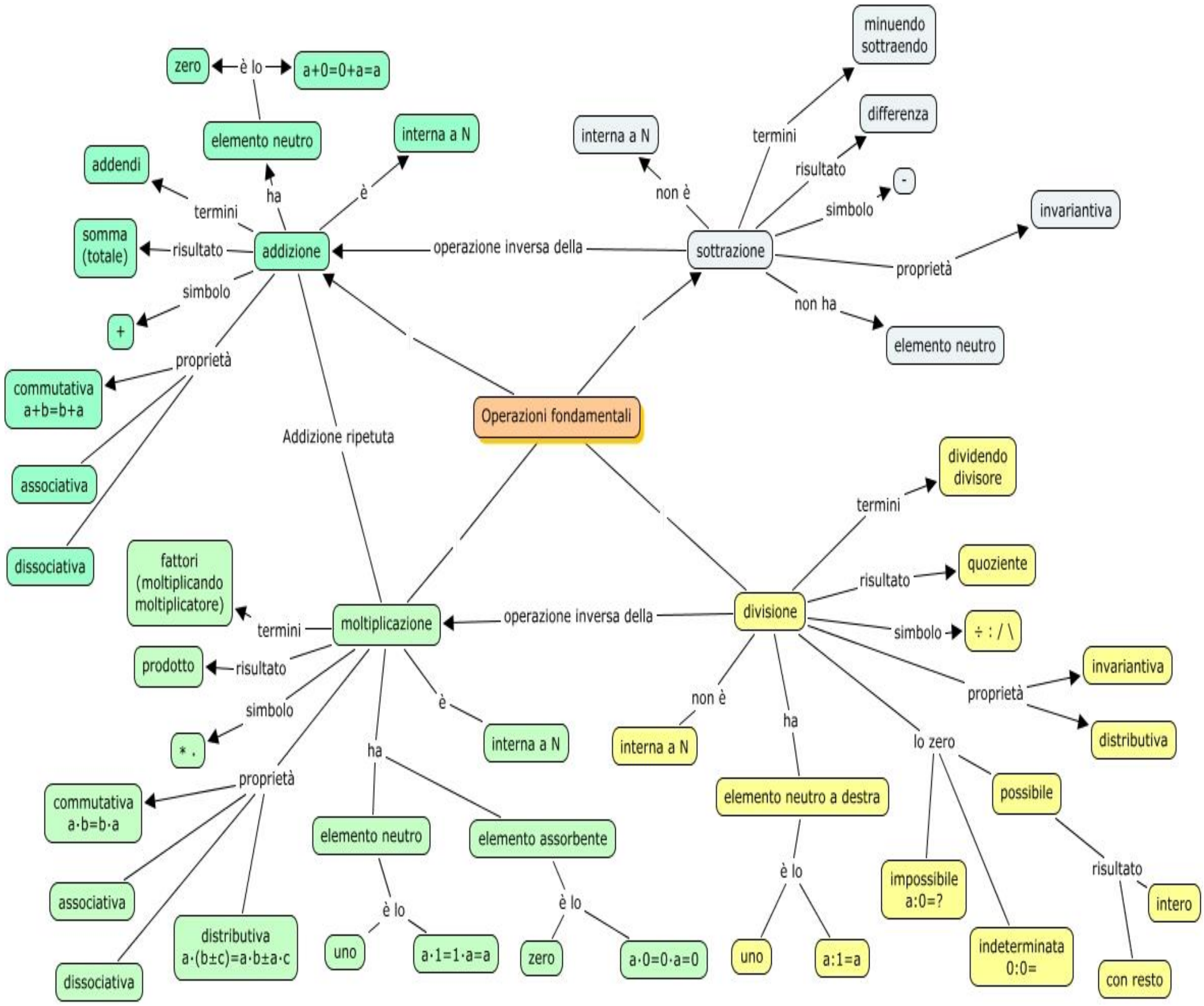
Proprietà distributiva della divisione
Per dividere i termini di un'addizione (o sottrazione) per un numero è possibile eseguire la divisione di ogni singolo termine dell'addizione (o sottrazione) per il divisore dato e poi sommarli (o sottrarli).
$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}):\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}:\boldsymbol{c})\pm(\boldsymbol{b}:\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}):(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \qquad \forall(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\in\mathbb{N}$

Espressioni aritmetiche
Un'espressione aritmetica è un insieme di due o più numeri separati da simboli di operazione ed eventualmente da opportune parentesi che indicano l'ordine di risoluzione delle operazioni.
Le parentesi indicano sottoinsiemi dell'espressione e vanno tolte solo quanto saranno state eseguite tutte le operazioni indicate e sarà rimasto un solo valore.
Le operazioni si eseguono secondo l'ordine seguente.

1° DIVISORE
2° FATTORE - DIVIDENDO (ordine indifferente)
3° SOTTRAENDO
4° ADDENDO - MINUENDO (ordine indifferente)

Nelle espressioni con parentesi si eseguono prima le operazioni in parentesi rotonde (), rispettando l'ordine delle operazioni, e a seguire nello stesso modo quelle delle parentesi quadre [] e, infine, quelle delle parentesi graffe {}. Una volta eseguite tutte le operazioni all'interno di una parentesi questa si deve eliminare.

Mappa concettuale



Dall'addizione all'elevamento a potenza passando per la moltiplicazione.

ADDIZIONE	**PROPRIETA'**
Termini: addendi Risultato: somma (commercio: totale) Simbolo: + (più)	Commutativa $\forall a, b \in \mathbb{N}$, $a + b = b + a$ Associativa Interna a $\mathbb{N}$ Elemento neutro 0
MOLTIPLICAZIONE	**PROPRIETA'**
Riduce un'addizione, di tanti addendi uguali tra loro, al prodotto di due valori. $2 \cdot 3 = \underbrace{2+2+2}_{3\ volte} = 6$ Termini: fattori Risultato: prodotto Simbolo: $\times$ $\cdot$ $*$ (per)	Commutativa $\forall a, b \in \mathbb{N}$, $a \cdot b = b \cdot a$ Associativa Distributiva $\boldsymbol{a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c}$ $\forall(\boldsymbol{a, b, c}) \in \mathbb{N}$ Interna a $\mathbb{N}$ Elemento neutro 1
ELEVAMENTO A POTENZA	**PROPRIETA'**
Riduce una moltiplicazione, di tanti fattori uguali tra loro, alla potenza di due valori. $2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\ volte} = 8$ Termini: base ed esponente Risultato: potenza Simbolo: y^x $x^{\blacksquare}$ ^ **	Interna a $\mathbb{N}$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ $a^m : b^m = \dfrac{a^m}{b^m} = (a : b)^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ Casi particolari $a^1 = a$ $1^n = 1$ $0^n = 0 \quad (\forall n \neq 0)$ $a^0 = 1 \quad (\forall a \neq 0)$ $10^n = 1\underbrace{0 \ldots}_{n\ zeri}$
SOTTRAZIONE	**PROPRIETA'**
Termini: (minuendo e sottraendo) Risultato: differenza (commercio: resto) Simbolo: - (meno)	INVARIANTIVA $\boldsymbol{a - b = (a \pm c) \cdot (b \pm c)}$ $\forall(\boldsymbol{a, b, c}) \in \mathbb{N}$ NON è interna a $\mathbb{N}$ - $2 - 3 = -1 \in \mathbb{Z}$
DIVISIONE	**PROPRIETA'**
Termini: dividendo e divisore Risultato: quoziente Simbolo: : oppure / oppure ÷ (diviso)	INVARIANTIVA DISTRIBUTIVA NON è interna a $\mathbb{N}$- $3 : 2 = 1{,}5 \in \mathbb{Q}$