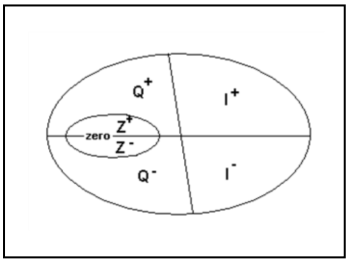
Numeri interi, relativi e reali



I numeri formati dallo zero, dai numeri naturali e dai loro opposti negativi, ottenuti ponendo il segno meno davanti ai naturali positivi, sono detti **numeri interi** o **numeri interi relativi**.
Si indica l'insieme dei numeri interi con la lettera $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$). La lettera scelta riprende il tedesco *Zahl* che significa numero.
L'insieme $\mathbb{Z}$ è un insieme totalmente ordinato senza estremo superiore o inferiore.

$$+9 \text{ e } -5 \textit{ sono numeri interi}$$

L'insieme $\mathbb{R}$ dei **numeri reali** comprende tutti i numeri cui è possibile attribuire uno sviluppo decimale finito o infinito e possono essere positivi, negativi o nulli ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).

I **numeri reali** costituiscono un insieme ordinato e completo senza un estremo superiore e senza un estremo inferiore (relazione d'ordine totale, godendo delle proprietà transitiva e antisimmetrica).

I numeri reali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti della retta numerica reale.

Lo zero è considerato non positivo e non negativo.

Un numero reale è, quindi, l'associazione di un valore assoluto e di un segno e le due parti sono inscindibili tra loro.

Il **modulo** o **valore assoluto** di un numero è il numero stesso preso senza il segno.
Per indicare il modulo si usano due barrette verticali.

$$|+3| = |-3| = 3$$

Due numeri si dicono **concordi** se hanno lo stesso segno.

$$+3 \ e \ +7 \textit{ sono concordi} \qquad -3 \ e \ -7 \textit{ sono concordi}$$

Due numeri si dicono **discordi** se hanno segno diverso

$$+3 \ e \ -7 \textit{ sono discordi}$$

Due numeri si dicono **opposti** se sono discordi e hanno lo stesso modulo.

$$+4 \ e \ -4 \textit{ sono opposti}$$

Due numeri si dicono **uguali** se hanno lo stesso segno e lo stesso modulo.

Confronto di numeri

Tra due numeri discordi il maggiore è sempre quello positivo.

$+4 > -3$

Tra due numeri positivi il maggiore è quello di maggiore valore assoluto.

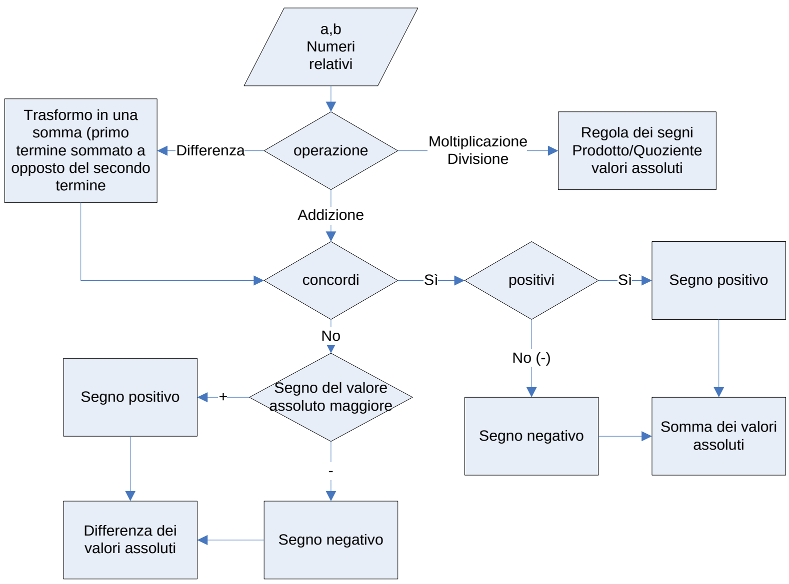
$+4 > +3$

perché $|+4| > |+3|$

Tra due numeri negativi il maggiore è quello di minore valore assoluto.

$-3 > -4$

perché $|-3| < |-4|$



Le operazioni

Addizione

La **somma** di due numeri relativi **concordi** è un numero che ha lo stesso segno degli addendi e valore assoluto uguale alla somma dei loro valori assoluti.

$(+3)+(+4) \ = \ +7 \qquad (-2)+(-5) \ = -7$

La **somma** di due numeri relativi **discordi** è un numero che ha il segno dell'addendo di valore assoluto maggiore e valore assoluto uguale alla differenza dei loro valori assoluti.

$(-3)+(+4) \ = \ +1 + \ perché\ |+4| > |-3| \qquad (+2)+(-5) \ = -3 - \ perché\ |-5| > |+2|$

Regole di uso pratico

Un'utile regola di uso pratico, applicabile quando si deve calcolare la somma di più numeri relativi, consente di eseguire la somma di tutti i numeri positivi e di quelli negativi e di seguire poi la regola precedente per il calcolo della somma finale.

$$(+3)+(-2)+(+7)+(-9) \ = \ (+3)+(+7)+(-2)+(-9) \ = \ (+10)+(-11) \ = \ -1$$

In una somma le coppie di addendi opposti possono essere eliminate.

$$(+3)+(-5)+(-3) \ = \ -5$$

Un numero positivo può essere scritto benissimo senza segno.

Si può ricorrere alla scrittura semplificata di una somma algebrica trasformandola in un'espressione con soli segni + e – semplicemente ricordando che una parentesi preceduta dal segno + può essere eliminata.

$$(+4)+(+3) \ = \ 4 \ + \ 3$$
$$(+5)+(-7) \ = \ 5-7$$
$$7 \ + \ (4-2 \ + \ 3) \ = \ 7 \ + \ (+4-2 \ + \ 3) \ = \ 7 \ + \ 4 \ - \ 2 \ + \ 3$$

Sottrazione

La **differenza** tra due numeri relativi si ottiene sommando al minuendo l'opposto del sottraendo.

In altre parole la sottrazione può essere ricondotta a un'addizione.

Regole di uso pratico

Si può ricorrere alla scrittura semplificata di una differenza algebrica trasformandola in un'espressione con soli segni + e – semplicemente ricordando che una parentesi preceduta dal segno - può essere eliminata cambiando di segno tutti i suoi termini.

$$(+4)-(+3) \ = \ 4-3 \qquad (+5)-(-7) \ = \ 5 \ + \ 7$$
$$7 \ - \ (4-2 \ + \ 3) \ = \ 7 \ - \ (+4-2 \ + \ 3) \ = \ 7 \ - \ 4 \ + \ 2 \ - \ 3$$

Moltiplicazione e divisione

Il **prodotto** o il **quoziente** di due numeri relativi è un numero relativo che ha valore assoluto uguale al prodotto o al quoziente dei valori assoluti e segno positivo se i termini dell'operazione sono concordi e segno negativo se i termini dell'operazione sono discordi (regola dei segni).

$$(+4) \cdot (+3) \ = \ +12 \qquad (+4):(+2) \ = \ +2$$
$$(-2) \cdot (-6) \ = \ +12 \qquad (-4):(-2) \ = \ +2$$
$$(+5) \cdot (-7) \ = \ -35 \qquad (-6):(+2) \ = \ -3$$

Per la regola dei segni, spiegazioni ulteriori e il metodo insegnato nelle scuole russe (amico di un mio amico [+], amico di un mio nemico [-], nemico di un mio amico [-] e nemico di un mio nemico [+]) vedi l'interessante documento disponibile sul sito ubimath.org.

Operazione di elevamento a potenza

Le regole seguenti sono ottenute applicando quanto già conosciamo sulle potenze e in conseguenza del *principio di Hankel* o del principio di permanenza delle proprietà formali (*).

La potenza di numeri relativi positivi è sempre positiva.

$$(+3)^2 = \underbrace{(+3)\cdot(+3)}_{2\ volte} = +9 = 9$$

La potenza di numeri relativi negativi è positiva se l'esponente è pari, negativa se l'esponente è dispari.

$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = +9 = 9$ + *esponente pari*

$(-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27$ - *esponente dispari*

Presta attenzione a non confondere i seguenti diversi tipi di scrittura:

$$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9 \quad versus \quad -3^2 = -9$$

Valgono anche per i numeri relativi le proprietà delle potenze.

Il **prodotto di potenze aventi la stessa base** è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Il **quoziente di potenze aventi la stessa base** è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti $a^n : a^m = a^{n-m}$

La **potenza di una potenza** è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

Il **prodotto di potenze con lo stesso esponente** è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per base il prodotto delle basi $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$

Il **quoziente di potenze con lo stesso esponente** è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per base il quoziente delle basi $a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Qualsiasi potenza con esponente 1 è la base

$$a^1 = a \rightarrow a = a^1$$

Qualsiasi potenza con esponente 0 è pari a 1

$$a^0 = 1$$

La potenza 00 è priva di significato!

$$0^0 \ \text{è priva di significato}$$

Qualsiasi potenza con base 1 è 1

$$1^n = 1$$

Potenze con esponente negativo e base diversa da zero sono pari a una potenza che ha come base l'inverso della base e come esponente lo stesso esponente ma positivo.

$$\boxed{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n} \qquad 3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \qquad (-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{8} \qquad \left(-\frac{7}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$$

(*) Principio introdotto da G. Peacock (in Brit. Ass., III, Londra 1834, e in Symbolical Algebra, Cambridge 1845) e poi formulato e applicato esplicitamente da H. Hankel nella sua Theorie der komplexen Zahlensysteme, Lipsia 1867.

Estrazione di radice di numeri relativi

È detta radice ennesima, di indice *n*, di un numero reale *a*, un secondo numero reale *b*, se esiste, tale che la potenza ennesima di questo sia uguale ad a.

Si scrive $\sqrt[n]{a} = b \rightarrow b^n = a$

e può essere posto sotto la forma $b = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = b$

Il numero *a* che compare sotto il segno di radice è detto **radicando**, il numero *b* **radice** e *n*, posto sopra il simbolo di radice, è detto **indice**.

Se il radicando è un numero relativo positivo e l'indice è pari si assume come valore della radice quello positivo.

$\sqrt{9} = 3 \qquad (-3)(-3) = (+3)(+3) = 9$

$\sqrt[4]{916} = 2 \qquad (-2)(-2)(-2)(-2) = (+2)(+2)(+2)(+2) = 16$

Se il radicando è un numero relativo positivo e l'indice è dispari la radice è un numero positivo.

$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad (+2)(+2)(+2) = (+4)(+2) = +8$

La radice di indice dispari di un numero relativo negativo è un numero negativo.

$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad (-2)(-2)(-2) = (+4)(-2) = -8$

La radice di indice pari di un numero relativo negativo non esiste in ℝ ma ai numeri immaginari.

$\sqrt{-1} = non\ esiste\ in\ \mathbb{R} \rightarrow \quad \sqrt{-1} = i \quad (-1)(-1) = +1 \qquad \sqrt[n]{-a} = con\ n\ pari\ non\ esiste$

I numeri complessi sono un'estensione dei numeri reali ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) che consentono di trovare tutte le soluzioni delle equazioni polinomiali. L'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzioni nei numeri reali, non esistono infatti numeri il cui quadrato sia negativo. Si definisce allora l'unità immaginaria i, che gode della seguente proprietà:

$i^2 = -1$

In questo modo è possibile scrivere un numero complesso formato da una parte reale e da una parte immaginaria, $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Un numero complesso può essere rappresentato con un punto sul piano cartesiano, chiamato in questo caso piano di Gauss (diagramma di Argand-Gauss).

Valgono anche per i numeri relativi le proprietà seguenti.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a : b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$$

ma

$$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

Iniziamo con un racconto

Estratto di uno spunto didattico di Ubaldo Pernigo in una delle sue classi…

Gli orizzonti crescendo si allargano a nuovi mondi e scoperte, facendo RELATIVI i confini numerici dell'infanzia.

Si scopre come di ognuno esista il suo OPPOSTO, l'alter ego, il Mr. Hyde[1], la faccia nascosta, la maschera e il cuore di pietra. Se esiste il POSITIVO, il buono, esisterà, nascosto in qualche angolo recondito, il NEGATIVO, il cattivo e l'innominabile.

Guardando attentamente, senza prevenzione alcuna, si scoprirà come ognuno sia però sempre sé stesso, né bello né brutto, né bene né male, né positivo né negativo, ma come oltre le parvenze di ognuno esista un suo VALORE ASSOLUTO.

L'incontro di entità opposte le annichilisce, ristabilendo l'equilibrio, quale spartiacque tra il male e il bene, il positivo e il negativo.

Magicamente entità CONCORDI giocano a creare valori positivi, mentre entità DISCORDI portano esattamente nel verso opposto, in negativo.

Gli amici e i nemici, il bene e il male che tutto circonda ci porta a semplici regole del quieto vivere e a una certa dose di sana diffidenza.

- L'amico di un mio amico è un mio amico.
- L'amico di un mio nemico è un mio nemico.
- Il nemico di un mio amico è un mio nemico.
- Il nemico di un mio nemico è un mio amico.

Conta, quindi, sui veri amici che trovi lungo la strada e diffida delle facili proposte e deviazioni.

Scavando in profondità si trova, infine, l'impossibile e oltre ancora mondi IMMAGINARI le cui sfaccettature riescono a creare insiemi fantastici.

Che ne dici poi di questa variante nata in classe con B. Alessandro nell'ottobre 2008.

☺ ☺ -> ☺

☺ ☹ -> ☹

☹ ☺ -> ☹

☹ ☹ -> ☺

[1] ***Lo strano caso del dottor Jekyll e del signor Hyde*** (*The Strange Case of Dr. Jekyll and Mr. Hyde*, 1886) è un celebre romanzo dello scrittore di edimburgo Robert Louis Stevenson

Cenni storici

La regola dei segni viene dai più data per vera ma è stata storicamente, unitamente all'uso dei numeri negativi, al centro di diverse discussioni.

Già Diofanto di Alessandria (200 circa; 284 circa) nella sua Aritmetica ne faceva cenno nel Libro I p. 7 ("*A minus multiplied by a minus makes a plus 1; a minus multiplied by a plus makes a minus*" da Diophantus Of Alexandria A Study In The History Of Greek Algebra di Sir Thomas L. Heath, 1910).

I primi segni più e meno fanno la loro comparsa nel 1489 ad opera di Johann Widmann (Eger, 1462; Leipzig dopo il 1498). I numeri negativi furono accolti alla loro comparsa in Europa con molta diffidenza anche a causa della regola dei segni. Girolamo Cardano (Pavia, 24 settembre 1501; Roma, 21 settembre 1576) li diceva numeri finti, Michael Stiefel (Esslingen am Neckar, 1487; Jena, 19 aprile 1567), algebrista tedesco, li definisce numeri assurdi e François Viète (Fontenay-le-Comte, 13 dicembre 1540; Parigi, 1603), pensava ancora di poterli escludere.

L'unica giustificazione della regola dei segni è di tipo matematico. Volendo salvare il ruolo dello zero e la proprietà distributiva anche nell'insieme degli interi relativi è necessario che più per meno faccia meno e che meno per meno faccia più.

Fra' Luca Bartolomeo de Pacioli o anche Paciolo (Sansepolcro, c. 1445, 1514/1517) nella sua "Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proporzionalità", scritta in volgare (1494, c. 111 V) segue, dopo aver affermato, "*La qual cosa benché absurda non dimanco qui la intendo provar esser vera*" una dimostrazione mediante una riduzione all'assurdo per la regola dei segni.

$$(10-2)\cdot(10-2)=8\cdot 8=64$$

$$10\cdot 10-10\cdot 2-2\cdot 10+x=100-20-20+x=60+x$$

$$x=(-2)\cdot(-2)=+4$$

Keywords

Algebra, numeri relativi, relativi, numeri interi, interi, numeri positivi, numeri negativi, valore assoluto, numeri reali, segno, Z, espressioni algebriche, esercizi con soluzioni, matematica

Algebra, Z, signed numbers, integer, integer numbers, negative e non-negative numbers, real numbers, sign, exercises with solution, Algebraic Expressions solved, math

Algebra, Z, nombre negativo, nombre positivo, signo, matemática

Algèbre, Z, nombres relatifs, nombre négatifs, nombre positifs, nombres réels, mathématique

Algebra, Z, Positive und Negative Zahlen, reellen Zahlen, Signum, Mathematik