I numeri razionali

Per indicare il quoziente fra due numeri naturali *m* e *n*, si può scrivere una **frazione** che ha come **numeratore** il **dividendo** e per **denominatore** il **divisore** della divisione.

$$\frac{m}{n} = m : n \quad con \quad m, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0$$

Qualsiasi divisione, con denominatore diverso da 0, è esprimibile come frazione.

Questa scrittura non ha sempre risultato nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, l'ha solo per le frazioni apparenti.
Si opera un ampliamento ai **numeri frazionari** o **razionali**, l'insieme $\mathbb{Q}$.
Si ha, inoltre, che l'insieme dei numeri naturali è un sottoinsieme dei razionali ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$).

A ogni numero razionale corrispondono tutte le frazioni appartenenti alla medesima **classe di equivalenza**. Ogni classe di equivalenza trova precisa sistemazione sulla retta dei numeri.

Una frazione si dice **frazione decimale** quando ha per denominatore una potenza di 10 ed è quindi generalizzabile nella forma $\frac{a}{10^n}$ con $a, n \in \mathbb{N}$ e con $a \neq 0$,

*Per le frazioni che non si presentano in forma decimale, denominate **frazioni ordinarie**, possono verificarsi due casi.*

- La frazione ordinaria **è riconducibile a una frazione decimale**, quando ridotta ai minimi termini compare nella classe di equivalenza relativa una frazione decimale.

$$\left[\frac{4}{5}\right] = \left\{\frac{4}{5}, \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{10}}, \frac{12}{15}, \frac{16}{20}, \frac{20}{25}, \dots\right\} \qquad \left[\frac{3}{2}\right] = \left\{\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}, \frac{12}{8}, \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{10}}, \frac{18}{12}, \dots\right\}$$

- La frazione ordinaria **NON è riconducibile a una frazione decimale**

$\left[\frac{4}{3}\right] = \left\{\frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{12}{9}, \frac{16}{12}, \frac{20}{15}, \dots\right\}$	Essendo i denominatori tutti multipli di 3 non comparirà mai 10 o un suo multiplo.
$\left[\frac{4}{7}\right] = \left\{\frac{4}{7}, \frac{8}{14}, \frac{12}{21}, \frac{16}{28}, \frac{20}{35}, \dots\right\}$	Essendo i denominatori tutti multipli di 7 non comparirà mai 10 o un suo multiplo.
$\left[\frac{5}{6}\right] = \left\{\frac{5}{6}, \frac{10}{12}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}, \frac{25}{30}, \dots\right\}$	Essendo i denominatori tutti multipli di 3 ($6 = 2 \cdot 3$) non comparirà mai 10 o un suo multiplo.

Una frazione è riconducibile alla forma decimale quando il suo denominatore è scomponibile nei fattori 2 o 5 o entrambi.

In tutti gli altri casi la frazione non è riconducibile a una frazione decimale. Dalla scomposizione sarà facile ricondurre le frazioni alla forma decimale, quando possibile, moltiplicando per le potenze del 2 e del 5 in modo da completare quella del 10 più prossima.

La divisione

I termini della divisione si chiamano rispettivamente **dividendo** e **divisore**, il risultato si chiama **quoziente**. Il simbolo usato per la divisione è il due punti (:) ma si usa anche la barretta (/). Il simbolo ÷, chiamato **obelus**, è pure usato nelle calcolatrici.
Si usa come separatore decimale nel quoziente la **virgola** o il **punto** secondo il paese.

> L'uso del sopralineato per la parte decimale è attribuita al matematico persiano Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780-850), venne poi usato un piccolo trattino verticale (ˌ) come separatore tra le unità e i decimali, e con l'avvento dei caratteri mobili per la stampa si preferirono la virgola (,) o il punto (.). La 22ª Conferenza generale dei pesi e delle misure ha dichiarato, nel 2003, che «il simbolo per il marcatore decimale deve essere il punto sulla linea [di base] o la virgola sulla linea [di base]». Ha inoltre ribadito che «i numeri possono essere divisi in gruppi di tre, al fine di facilitarne la lettura, né punti né virgole devono essere inseriti negli spazi tra i gruppi». (fonte Wikipedia)

Quoziente esatto

Quando esiste un numero naturale che moltiplicato per il divisore dà per risultato il dividendo si ha una divisione con **quoziente esatto**.

20	**:**	**4**	**=**	**5**	resto **0**
dividendo		divisore		quoziente	

Quoziente approssimato e resto

Quando la divisione non è possibile perché non esiste un numero naturale che moltiplicato per il divisore dia per risultato il dividendo si ha una divisione con **quoziente approssimato** e **resto**. Il **quoziente approssimato** è il più grande numero naturale che moltiplicato per il divisore dà come risultato un numero che non supera il dividendo.

33	**:**	**7**	**=**	**4**	resto **5**
dividendo		divisore		quoziente	

$33 : 7 = 4$ perché $7 \cdot 4 = 28$ che è il multiplo di 7 più vicino a 28 per difetto

Il **resto** è la differenza fra il dividendo e il prodotto del divisore per il quoziente.

33 : 7 = 4 con resto 5 perché 33 – (7 · 4) = 33 – 28 = 5

Da quanto esposto si deduce che:

$$quoziente \cdot divisore + resto = dividendo$$

$$a : b = q \; con \; resto \; r \qquad e \qquad b \cdot q + r = a$$

Esempio

33	**:**	**7**	**=**	**4**	resto **5**
dividendo	:	divisore	=	quoziente	
4	·	7	+	5	= 33
quoziente	·	divisore	+	resto	= dividendo

I due volti del mondo di $\mathbb{Q}$

Eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore di una qualsiasi frazione, ridotta ai minimi termini e non apparente (nel qual caso si ottiene un numero naturale), si possono ottenere numeri decimali finiti o illimitati secondo i casi.

Per stabilire quale tipo di numero decimale risulti dall'operazione di divisione tra due numeri qualsiasi è sufficiente fare, come vedremo, alcune considerazioni sul solo denominatore della frazione generatrice.

La notazione decimale fu introdotta solo nel 1585 dal matematico belga Simon Stevin (Bruges, 1548 – L'Aia, 1620). La nuova notazione evitava di operare con frazioni e era possibile usare le normali operazioni algebriche.

Frazioni decimali danno origine a **numeri decimali finiti**; viceversa un numero decimale finito ammette una frazione generatrice decimale.

In questo caso, dati due numeri qualsiasi a e b, eseguendone la divisione nell'ordine dato si avrà, dopo aver applicato un certo numero di volte l'algoritmo di divisione, resto zero.

$$q \cdot b = a \qquad \textit{essendo il resto pari a 0}$$

Esempio: $6 : 2 = 3 \; resto \; 0, \; quindi \; 3 \cdot 2 = 6$
Esempio: $12 : 5 = 2{,}4 \; resto \; 0, \; quindi \; 2{,}4 \cdot 5 = 12{,}0 = 12$

Una **frazione ridotta ai minimi termini** origina un numero **decimale finito** se il suo denominatore, scomposto in fattori primi, contiene solo i fattori 2 e/o 5.

Frazioni non decimali danno origine a **numeri decimali illimitati periodici**. Le cifre che si ripetono costituiscono il **periodo**, mentre le cifre comprese fra la virgola e il periodo si dicono **antiperiodo**.

Se c'è l'antiperiodo, il numero si dice **periodico misto** (nel numero $1{,}2\overline{43}$, per esempio, 1 è la parte intera, 2 l'antiperiodo e 43 il periodo), in caso contrario si dice **periodico semplice** (nel numero $1{,}\overline{3}$, per esempio, il numero 1 è la parte intera e il 3 il periodo, manca l'antiperiodo).

Si può risalire, anche in questo caso, alla frazione generatrice.

Una **frazione ridotta ai minimi termini**, origina un numero **decimale periodico semplice** se il suo denominatore, scomposto in fattori primi, contiene solo fattori diversi da 2 e da 5.

Una **frazione ridotta ai minimi termini**, origina un numero **decimale periodico misto** se il suo denominatore, scomposto in fattori primi, contiene i fattori 2 e/o 5 con altri diversi dal 2 e dal 5.

In questo caso, dati due numeri qualsiasi a e b, eseguendone la divisione nell'ordine si avrà dopo aver applicato un certo numero di volte l'algoritmo di divisione un resto che induce la ripetizione di una sequenza di una o più cifre.

$$q \cdot b + r = a \qquad \textit{essendo il resto diverso da 0}$$

$$quoziente \cdot divisore + resto = dividendo$$

Esempi:
$\mathbf{1} : \mathbf{3} = \mathbf{0,3} \; resto \; 0{,}1, \quad \rightarrow \quad \mathbf{0,3} \cdot \mathbf{3} + 0{,}1 = \mathbf{1}$
$\mathbf{17} : \mathbf{5} = \mathbf{3} \; resto \; 2, \quad \rightarrow \quad \mathbf{3} \cdot \mathbf{5} + 2 = \mathbf{17}$

Frazione generatrice

Utilizzando l'algoritmo di divisione è possibile trasformare una frazione qualsiasi nel relativo numero decimale.

Utilizzando la regola seguente, che troverete dimostrata più avanti con degli esempi, è possibile risalire alla frazione che ha generato un numero decimale, la sua **frazione generatrice**.

Per trovare la frazione **generatrice di un numero decimale finito** si scrive una frazione che ha per numeratore il numero, preso senza la virgola, e per denominatore l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali.

Esempi

$$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$2{,}5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

Per trovare la frazione **generatrice di un numero decimale periodico** si scrive una frazione che ha per numeratore la differenza tra il numero, preso senza la virgola, e il numero formato dalle cifre che precedono il periodo e per denominatore tanti nove quante sono le cifre che formano il periodo seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

$$0{,}\overline{6} = \frac{6-0}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$5{,}\overline{3} = \frac{53-5}{9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$$

$$0{,}8\overline{3} = \frac{83-8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$$

$$3{,}2\overline{3} = \frac{323-32}{90} = \frac{291}{90} = \frac{97}{30}$$

Come si risalga, anche nel caso meno immediato dei periodici, alla frazione generatrice è frutto di una serie di deduzioni che sono di seguito illustrate con degli esempi.

Si dimostra, inoltre, che $0,\overline{9} = 1$.

$$x = 0,\overline{9} \rightarrow 10 \cdot x = 9,\overline{9} \rightarrow 10 \cdot x - x = 9,\overline{9} - 0,\overline{9} \rightarrow 9x = 9 \rightarrow x = 1$$

Lo stesso vale per altri numeri con periodo 9.

Numeri con periodo 9 costituiscono, quindi, un altro modo di rappresentare lo stesso numero.

$$x = 2,\overline{9} \rightarrow 10 \cdot x = 29,\overline{9} \rightarrow 10 \cdot x - x = 29,\overline{9} - 2,\overline{9} \rightarrow 9x = 27 \rightarrow x = 3$$

Dimostrazione informale

Di seguito si riporta, per esempi, una dimostrazione informale, in ogni modo valida, che motiva le formule precedentemente illustrate e mnemoniche. Non serve ricorrere in questo caso alle serie geometriche.

Esempio 1

Sia *n/d* la frazione generatrice di $1,\overline{3}$. Moltiplichiamo per 10 i due membri dell'uguaglianza

$$\frac{n}{d} = 1,\overline{3} \quad \rightarrow \quad \frac{n}{d} \cdot 10 = 1,\overline{3} \cdot 10 \quad \rightarrow \quad 10 \cdot \frac{n}{d} = 13,\overline{3}$$

sottraiamo *n/d* (ricorda che *n/d* = $1,\overline{3}$) ai due termini otterremo:

$$10 \cdot \frac{n}{d} - \frac{n}{d} = 13,\overline{3} - \frac{n}{d} \quad \rightarrow \quad 10 \cdot \frac{n}{d} - \frac{n}{d} = 13,\overline{3} - 1,\overline{3} \quad \rightarrow \quad 10 \cdot \frac{n}{d} - \frac{n}{d} = 12$$

da cui

$$9 \cdot \frac{n}{d} = 12 \quad \rightarrow \quad 9 \cdot \frac{n}{d} \cdot \frac{1}{9} = 12 \cdot \frac{1}{9} \quad \rightarrow \quad \frac{n}{d} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Esempio 2

Sia *n/d* la frazione generatrice di $3,\overline{12}$, moltiplichiamo per 100 i due membri dell'uguaglianza

$$\frac{n}{d} = 3,\overline{12} \quad \rightarrow \quad \frac{n}{d} \cdot 100 = 3,\overline{12} \cdot 100 \quad \rightarrow \quad 100 \cdot \frac{n}{d} = 312,\overline{12}$$

sottraiamo *n/d* (ricorda che *n/d* = $3,\overline{12}$) ai due termini otterremo

$$100 \cdot \frac{n}{d} - \frac{n}{d} = 312,\overline{12} - 3,\overline{12} \quad \rightarrow \quad 10 \cdot \frac{n}{d} - \frac{n}{d} = 309$$

da cui

$$99 \cdot \frac{n}{d} = 309 \quad \rightarrow \quad 99 \cdot \frac{n}{d} \cdot \frac{1}{99} = 309 \cdot \frac{1}{99} \quad \rightarrow \quad \frac{n}{d} = \frac{309}{99} = \frac{103}{33}$$

Esempio 3

Per i numeri decimali periodici misti sarà sufficiente estendere il ragionamento fatto per quelli semplici dopo aver moltiplicato per una potenza di 10 il numero in modo da trasformarlo in uno semplice (la potenza andrà quindi al denominatore).

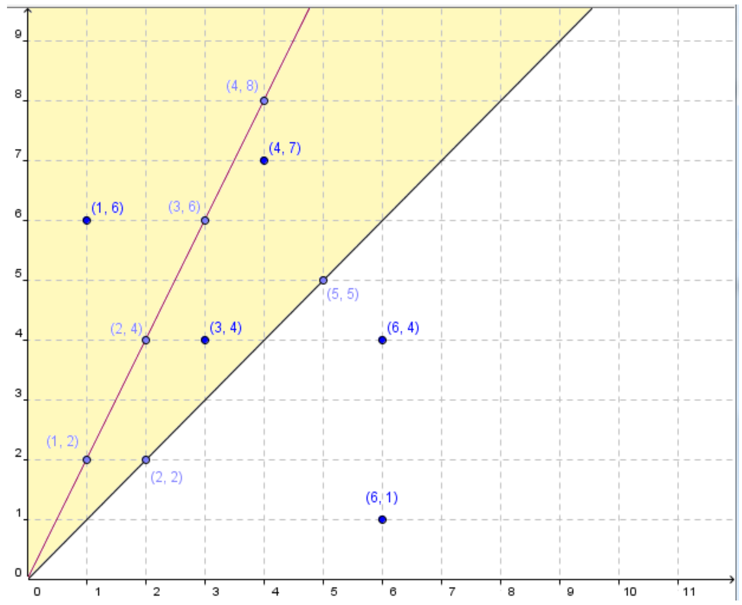
Sia *n/d* la frazione generatrice di $1{,}2\overline{3}$, moltiplicando per 10 i due numeri deve essere:

$$\frac{n}{d} = 1{,}2\overline{3} \quad \rightarrow \quad \frac{n}{d} \cdot 10 = 1{,}2\overline{3} \cdot 10 \quad \rightarrow \quad 10 \cdot \frac{n}{d} = 12,\overline{3}$$

Abbiamo ricondotto l'analisi al caso precedente.

Rappresentazione dei numeri razionali sul piano cartesiano

Le frazioni (ℚ) possono essere rappresentate graficamente come il prodotto cartesiano dato dall'insieme delle coppie ordinate di numeri naturali formati da numeratore e denominatore: $(n, d)\ con\ n, d \in \mathbb{N}$.
Per la rappresentazione si usa un piano cartesiano che abbia in ascissa il numeratore e in ordinata il denominatore.
Si vede come la bisettrice del quadrante divida la superficie reticolare in due aree, una con le frazioni proprie e una con le frazioni improprie comprese le apparenti.
Una classe di equivalenza costituisce una semiretta su cui giacciono tutte le frazioni equivalenti che vi appartengono.



La zona in giallo contiene tutte le frazioni proprie.

Le frazioni di una stessa classe di equivalenza giacciono tutte alla stessa semiretta (½, ad esempio, in colore rosso).

La bisettrice del quadrante rappresenta tutte le frazioni pari all'unità e forma lo spartiacque tra le proprie (minori di 1) e le improprie (maggiori di 1).

La realizzazione è possibile sia utilizzando un foggio di calcolo sia un programma per la geometria dinamica.

Divisione e linguaggi di programmazione

La divisione è indicata nei principali linguaggi di programmazione e nei fogli di calcolo come sequenza di caratteri inframmezzati dal simbolo "/" (esempio: $3/2 = 1.5$).

E' possibile in alcuni linguaggi di programmazione eseguire una divisione intera usando un diverso simbolo come operatore (esempio: in VB $3\backslash 2 = 1$). In altri casi si ottiene un intero proprio perché si presume che la divisioni tra interi sia intera (esempio: nel linguaggio C scrivendo 2/3 si ottiene 1 e non 1.5). I linguaggi dispongono del tipo dato intero (es. #define int lato) e della funzione int(), che ritorna la parte intera di un numero.

E' disponibile un **operatore modulo** o **resto** con cui si può ottenere il resto della divisione tra due numeri.

$7\ mod\ 3 = 1$ oppure 7 % 3 $= 1$

I fogli di calcolo dispongono delle funzioni **INT(num)**, che ritorna la parte intera di un numero o operazione e **RESTO(dividendo; divisore)** che ritorna il resto della divisione di due valori.

$INT(1.6) = 1 \qquad INT(1.3) = 1$

$RESTO(3; 2) = 1 \qquad RESTO(8; 3) = 2$

La funzione RESTO() può essere implementata usando la funzione INT().

$MOD(n, d) = n - d * INT(n/d)$

FRAZIONE generatrice - $\frac{m}{n}$ ***ridotta ai minimi termini***; $m, n \in N; n \neq 0$

eseguo la divisione
$m : n = q$

frazione apparente
numero naturale
m uguale o multiplo di n

numero decimale limitato
denominatore solo con i fattori 2 e/o 5

n. senza virgola
----
1 e a seguire
0 tanti quante le cifre decimali

numero decimale illimitato periodico

periodico semplice
denominatore senza il 2 e/o 5

(n. senza virgola) - (non periodo*)
----
9 tanti quante le cifre del periodo

periodico misto
denominatore con anche il 2 e/o 5

(n. senza virgola) - (non periodo*)
----
9 tanti quante le cifre del periodo e
0 tanti quante le cifre dell'antiperiodo

La frazione va prima ridotta ai minimi termini, $MCD(n, n) = 1$. Altrimenti:
$$\frac{4}{6} = \frac{4}{2 \cdot 3}$$
$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

FRAZIONE generatrice

eseguo la divisione

numero decimale limitato
3/4
5/2

$$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4};\ 2{,}5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

numero decimale illimitato periodico

semplice
2/3
16/3
5/21

$$0{,}\overline{6} = \frac{6-0}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3};\ 5{,}\overline{3} = \frac{53-5}{9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$$

misto
5/6
97/30
7/12

$$0{,}8\overline{3} = \frac{83-8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6};\ 3{,}2\overline{3} = \frac{323-32}{90} = \frac{291}{90} = \frac{97}{30}$$

* comprese la parte intera e le cifre dell'antiperiodo

Dimostrazione utilizzando le serie geometriche

Quanto esposto si può dimostrare anche ricorrendo alle serie geometriche, serie in cui il rapporto tra due termini successivi è costante. Il rapporto q è detto **ragione** della serie.

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q$$

Una serie geometrica può sempre essere scritta nella forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n$$

Dato un numero reale q, ragione della serie e minore di 1 $(-1 < q < 1)$, si dimostra che la somma è data dalla seguente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = S = \frac{1}{1-q}$$

Infatti

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 \ldots \rightarrow S - qS = 1$$

Raccogliendo S e dividendo per $(1-q)$ si ha

$$S(1-q) = 1 \rightarrow S = \frac{1}{1-q}$$

La serie deve essere convergente e, quindi, $|q| < 1$.

Esempio 1

$$1,\overline{3} = 1 + 0,\overline{3} = 1 + \frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n}$$

$$1,\overline{3} = 1 + \frac{3}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n}\right)$$

Calcoliamo la serie geometrica di ragione 1/10.

$$1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$$

Sostituendo abbiamo

$$\frac{n}{d} = 1 + \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Infatti $\quad 4 : 3 = 1,\overline{3}$

Esempio 2

$$3,\overline{12} = 3 + 0,\overline{12} = 3 + \frac{12}{10^2} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \cdots + \frac{12}{10^n}$$

$$3,\overline{12} = 3 + \frac{12}{10^2}\left(1 + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots + \frac{1}{10^n}\right)$$

Calcoliamo la serie geometrica di ragione $1/10^2$.

$$1 + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots + \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{100}{99}$$

Sostituendo abbiamo

$$\frac{n}{d} = 3 + \frac{12}{10^2} \cdot \frac{100}{99} = 3 + \frac{12}{99} = \frac{309}{99}$$

Infatti

$$309 : 99 = 3,\overline{12}$$

Esempio 3

$$1{,}2\overline{3} = 1 + 0{,}2 + 0{,}0\overline{3} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n}$$

$$1{,}2\overline{3} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \cdots + \frac{1}{10^n}\right)$$

Calcoliamo la serie geometrica di ragione 1/10.

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$$

Sostituendo abbiamo

$$\frac{n}{d} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} \cdot \frac{10}{9} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{1}{30} = \frac{30 + 6 + 1}{30} = \frac{37}{30}$$

Infatti

$$37 : 30 = 1{,}2\overline{3}$$

Keywords

Matematica, Aritmetica, espressioni, frazioni, numeri razionali, razionali, insieme Q, Q, decimali, periodici, periodo, antiperiodo, decimali limitati, decimali illimitati periodici, espressioni, addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni

Math, Arithmetic, Expression, Arithmetic Operations, Q, Rational numbers, Recurring Decimals, Arithmetic, Fraction, Expression, Periodic Decimal Expansions, Period, Arithmetic Operations Involving Fraction, Arithmetic Operations Involving Decimal Numbers

Matemática, Aritmética, fracción, Número racional, número decimal finito, número decimal periódico.

Mathématique, Arithmétique, nombre rationnel, périodique, développement décimal illimité

Mathematik, Arithmetik, rationale Zahl, Brüche, Dezimalbruch, Binärbruch, gewöhnlicher Bruch, gemischter Bruch, Äquivalenzrelation