Frazioni continue

Le frazioni continue consentono di avere una rappresentazione dei numeri reali ($x \in \mathbb{R}$) anche se la più nota tra le loro rappresentazioni, naturalmente, è l'espansione in forma decimale. John Wallis (3 dicembre1616 – 8 novembre 1703) ha per primo usato il termine "frazione continua" nella sua opera Arithmetica infinitorum del 1653.

Una frazione continua è un'espressione, con a_0 intero e gli altri a_n termini interi positivi detti quozienti parziali, espressa in una delle seguenti forme.

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3]$$

Si ottiene la frazione continua di un numero reale ($x \in \mathbb{R}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$) e espresso in forma decimale come ripetizione di due operazioni. Si prende la parte intera del numero e l'inverso della sua parte frazionaria che essendo maggiore di 1 può a sua volta essere scritto nello stesso modo come parte intera e inverso della sua parte frazionaria.

Applicando l'algoritmo questo si arresta per $f = 0$ e questo avviene se e solo se il numero x dato è razionale ($x \in \mathbb{Q}$). Se il numero è irrazionale, la rappresentazione in frazione continua è infinita e unica e, viceversa, ogni frazione continua infinita rappresenta un numero irrazionale.

Vediamo con degli esempi come si opera.

$5,24$

$i = a_n$	$i - f$	f	$1/f$	
5	5,24-5	0,24	1/0,24	$\frac{26}{6} \approx 4{,}1\bar{6}$
4	$4{,}1\bar{6}$-4	$0{,}1\bar{6} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$	$1/0{,}1\bar{6}$	$\frac{90}{15} = 6$
6	6-6	0		

$$[5; 4, 6] = 5 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{6}} = 5 + \cfrac{1}{\cfrac{24+1}{6}} = 5 + \frac{6}{25} = \frac{125+6}{25} = \frac{131 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{524}{100} = 5{,}24$$

1,15

$i = a_n$	$i - f$	f	$1/f$	
1	1,15-1	0,15	1/0,15	$= 6,\bar{6}$
6	$6,\bar{6}$-6	$0,\bar{6}$	$1/0,\bar{6}$	$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5$
1	1,5-1	0,5	1/0,5	$= 2$
2	2-2=0			

$$1{,}15 = [1; 6, 1, 2] = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{2}{3}} = 1 + \frac{3}{20} = \frac{23 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{115}{100} = 1{,}15$$

Altre informazioni: https://it.wikipedia.org/wiki/Frazione_continua

Copyright© 2014-2017 owned by Ubaldo Pernigo, www.ubimath.org - contact: ubaldo@pernigo.com
Il presente lavoro è coperto da Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale

Mettiti alla prova

Trova la frazione corrispondete alle seguenti frazioni continue e, usando la calcolatrice, trova il decimale corrispondente.

1.

$[1; 2, 2, 2, 10]$

$[1; 1, 1, 1, 6]$

Copyright© 2014-2017 owned by Ubaldo Pernigo, www.ubimath.org - contact: ubaldo@pernigo.com
Il presente lavoro è coperto da Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale

$$[1;2,2,2,10] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10}}}} = \frac{177}{125} = 1{,}416$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{10}{21}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{21}{52}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{21}{52}} = 1 + \frac{52}{125} = \frac{177}{125}$$

$$[1;1,1,1,6] = 1\ + \cfrac{1}{1\ + \cfrac{1}{1\ + \cfrac{1}{1\ + \cfrac{1}{6}}}} = \frac{33}{20} = 1{,}65$$

Keywords

Matematica, Aritmetica, espressioni, frazioni, numeri razionali, razionali, insieme Q, Q, decimali, periodici, periodo, antiperiodo, decimali limtati, decimali illimitati periodici, espressioni, addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni

Math, Arithmetic, Expression, Arithmetic Operations, Q, Rational numbers, Recurring Decimals, Arithmetic, Fraction, Expression, Periodic Decimal Expansions, Period, Aritmetic Operations Involving Fraction, Aritmetic Operations Involving Decimal Numbers

Matemática, Aritmética, fracción, Número racional, número decimal finito, número decimal periódico.

Mathématique, Arithmétique, nombre rationnel, périodique, développement décimal illimité

Mathematik, Arithmetik, rationale Zahl, Brüche, Dezimalbruch, Binärbruch, gewöhnlicher Bruch, gemischter Bruch, Äquivalenzrelation

Copyright© 2014-2017 owned by Ubaldo Pernigo, www.ubimath.org - contact: ubaldo@pernigo.com
Il presente lavoro è coperto da Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale