

INTRODUZIONE AI “PRODOTTI NOTEVOLI”

È utile disporre una formula che consenta di calcolare in maniera facile l' n – *esima* potenza di un binomio qualsiasi. Utilizzando gli strumenti di calcolo algebrico si ottengono i seguenti risultati.

per $n = 1$

$$(a + b) = a + b$$

per $n = 2$

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

per $n = 3$

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b) \cdot (a + b)^2 = (a + b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2) = a \cdot (a^2 + 2ab + b^2) + b \cdot (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + b^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

e così via?

Quale legge generale nasconde la frase "e così via"?

Si può osservare che il procedimento utilizzato si presta a essere ripetuto, per qualsiasi $(a + b)^n$, moltiplicando il risultato ottenuto precedentemente per $(a + b)^{n-1}$, nuovamente per $(a + b)$ e riducendo i monomi simili.

Si arriva così al seguente schema:

$$\begin{array}{l} a + b \qquad \qquad \qquad 1a \qquad + \qquad 1b \\ (a + b)^2 \qquad \qquad \qquad 1a^2 \qquad + \qquad 2ab \qquad + \qquad 1b^2 \\ (a + b)^3 \qquad \qquad \qquad 1a^3 \qquad + \qquad 3a^2b \qquad + \qquad 3ab^2 \qquad + \qquad 1b^3 \\ (a + b)^4 \qquad \qquad \qquad 1a^4 \qquad + \qquad 4a^3b \qquad + \qquad 6a^2 \qquad + \qquad 4a \qquad + \qquad 1b^4 \\ (a + b)^5 \qquad 1a^5 \qquad + \qquad 5a^4b \qquad + \qquad 10a^3b^2 \qquad + \qquad 10a^2b^3 \qquad + \qquad 5ab^4 \qquad + \qquad 1b^5 \end{array}$$

Alcuni prodotti di polinomi, che ricorrono in diverse applicazioni, si calcolano rapidamente applicando regole fisse dette **regole dei prodotti notevoli** o **prodotti notevoli**.

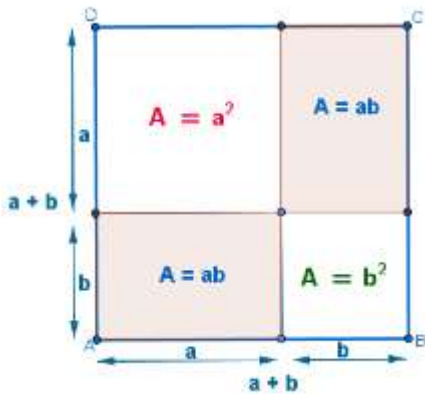
Queste regole sono, quindi, utili se imparate a memoria.

GIUSTIFICAZIONE GEOMETRICA

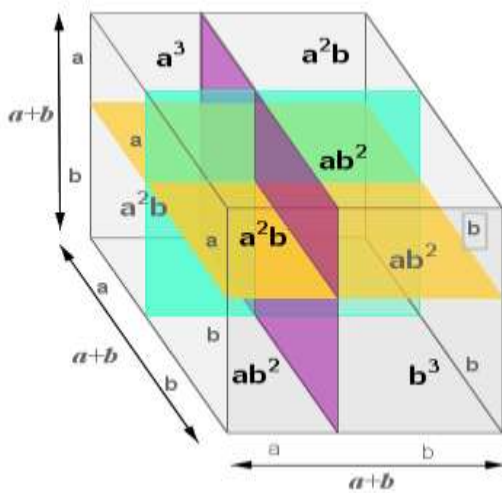
Del quadrato di un binomio e del cubo di un binomio si può dare una giustificazione geometrica, dell'espressione algebrica ottenuta, in termini rispettivamente di aree e volumi.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Area di due quadrati diversi con lato a e b e di due rettangoli ab uguali.



$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



QUADRATO DEL BINOMIO

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Il quadrato della somma algebrica di due monomi è uguale al quadrato del primo monomio, più il doppio prodotto del primo monomio per il secondo, più il quadrato del secondo monomio.

NB Si utilizzando lettere maiuscole ad indicare un qualsiasi polinomio (o monomio).

Presta attenzione a come serve tenere conto del segno nell'applicare la regola: $(A + B)^2 \neq (A - B)^2$

$$(2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 \quad \text{dove } A = 2x \text{ e } B = y$$

$$(2x - y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$$

CUBO DEL BINOMIO

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Il cubo di un binomio è uguale al cubo del primo termine, più il triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo, più il triplo prodotto del primo monomio per il quadrato del secondo, più il cubo del secondo monomio.

Presta attenzione a come serve tenere conto del segno nell'applicare la regola: $(A + B)^3 \neq (A - B)^3$

$$(2x + y)^3 = 8x^3 + 6x^2y + 6xy^2 + y^3$$

$$(2x - y)^3 = 8x^3 - 6x^2y + 6xy^2 - y^3$$

PRODOTTO DELLA SOMMA DI DUE TERMINI PER LA LORO DIFFERENZA

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Il prodotto della somma di due termini per la loro differenza è uguale al quadrato del primo termine meno il quadrato del secondo termine.

$$(2x + y)(2x - y) = 4x^2 - y^2$$

QUADRATO DI UN TRINOMIO E DI POLINOMIO DI N O PIÙ TERMINI

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

Il quadrato di un polinomio di un numero qualsiasi di termini è uguale alla somma dei quadrati di tutti i termini più il doppio prodotto, con il relativo segno, di ogni termine per ciascuno di quelli che lo seguono.

ALTRI CASI MENO EVIDENTI

$$(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$$

Somma di due cubi

$$(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$$

Differenza di due cubi

$$(A + B)^3(A - B)^3 = (A^2 - B^2)^3$$

$$(A + B + C)(A + B - C) = A^2 + 2AB + B^2 - C^2$$

$$(A + B + C)(A - B - C) = A^2 - (B - C)^2$$

TRIANGOLO DI PASCAL/TARTAGLIA

Il triangolo di [Tartaglia](#), detto anche triangolo di [Khayyam/Pascal](#), riguarda lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio.

Precisamente lo sviluppo di un binomio con n intero e positivo è dato dalla formula:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)} ab^{n-1} + b^n$$

La formula è storicamente dovuta al cinese [Chu Shich Chiech](#) (*Prezioso specchio dei quattro elementi*, del 1303), ma fu ritrovata dal matematico italiano Nicolò Fontana detto Tartaglia (*Trattato dei numeri ed misure*, del 1556), che diede i coefficienti di questo sviluppo col triangolo che porta, oltre al nome di Blaise Pascal (1623-1662), il suo nome e dove ogni termine di posto p di una riga è pari alla somma dei termini adiacenti, di posto p e $p - 1$, della riga precedente.

				1					
				1	1				
			1	2	1				
		1	3	3	1				
		1	4	6	4	1			
	1	5	10	10	5	1			
	1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1		

Per n frazionario ma reale qualunque lo sviluppo del binomio, detto di Newton, è dato dalla **formula di Newton**.

Formulario riassuntivo - Identità e somme notevoli

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + ab\sqrt{2} + b^2) \cdot (a^2 - ab\sqrt{2} + b^2)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b+c) + 3b^2(a+c) + 3c^2(a+b) + 6abc$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$$

Prova tu

USA I PRODOTTI NOTEVOLI PER I SEGUENTI CALCOLI.

1. Il quadrato di 21 considerato come $20 + 1$.

Esempio: $(20 + 1)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 + 40 + 1 = 441$

2. Il quadrato di 29 considerato come $30-1$.

3. Il quadrato di 48 considerato come $50-2$.

4. Il quadrato di 61 considerato come $60+1$.

5. Il quadrato di 79 considerato come $80-1$.

6. Il quadrato di 83 considerato come $80+3$.

7. Il prodotto di $19 \cdot 21$ considerato come $(20 - 1)(20 + 1)$.

Esempio: $(20 - 1) \cdot (20 + 1) = 20^2 - 1^2 = 400 - 1 = 399$

8. Il prodotto di $29 \cdot 31$ considerato come $(30-1)(30+1)$.

9. Il prodotto di $18 \cdot 22$ considerato come $(20-2)(20+2)$.

10. Il prodotto di $48 \cdot 52$ considerato come $(50-2)(50+2)$.

11. Il prodotto di $37 \cdot 43$ considerato come $(40-3)(40+3)$.

12. Il prodotto di $51 \cdot 49$ considerato come $(50+1)(50-1)$.

VERIFICA LE SEGUENTI IDENTITÀ.

1. [Euclide] $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
2. [Euclide] $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$
3. [Waring] $(x + y)^2 - 2xy = x^2 + y^2$
4. [Pitagora] $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$
5. [Peano] $(m - n)^2 + (n - p)^2 + (m - p)^2 = 2 \cdot (m^2 + n^2 + p^2 - mn - mp - np)$
6. [Peano] $(m - n)^2 + (m - p)^2 + (n - p)^2 = 2\{(m - n)(m - p) + (m - p)(n - p) + (n - p)(n - m)\}$
7. [Waring] $(x + y)^3 - 3xy(x + y) = x^3 + y^3$
8. [Waring] $(x - y)^3 + 3xy(x - y) = x^3 - y^3$
9. [Cauchy] $(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$
10. [Waring] $(x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 2x^2y^2 = x^4 + y^4$
11. [Waring] $(x - y)^4 + 4xy(x - y)^2 + 2x^2y^2 = x^4 + y^4$
12. [Eulero] $(2a + 2b - c)^2 + (2a + 2c - b)^2 + (2b + 2c - a)^2 = 9(a^2 + b^2 + c^2)$
13. [Eulero] $(a^2 + 2ab + 2b^2) + (a^2 - 2ab + 2b^2) = a^4 + 4b^4$
14. [Tannery] $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(ac + bd)^2 + 4(bc - ad)^2$
15. [Legendre] $(a + b + c + d)^2 + (a + b - c - d)^2 + (a - b + c - d)^2 + (a - b - c + d)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$
16. [Diofanto] $(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

AUTORI CITATI

Euclide (IV secolo a.C.) - Matematico greco, visse ad Alessandria d'Egitto, sotto il regno di Tolomeo I. Sembra abbia studiato in Atene con Socrate e abbia avuto come allievo Platone. Immortale per i suoi "Elementi", in tredici libri.

Diofanto d'Alessandria (III secolo d.C.) - Matematico greco vissuto ad Alessandria d'Egitto, di cui sono pervenute due opere: un libro sui "Numeri Poligonalari" ed il trattato "Aritmetica", in sei libri.

Niccolò Fontana detto Tartaglia (1500-1577) - Matematico italiano.

es.wikipedia.org/wiki/Niccolo_Fontana_Tartaglia

Blaise Pascal (1623-1662) - Matematico, fisico e filosofo francese.

it.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal

Eulero (Leonhard Euler, 1701-1783) - Matematico svizzero, nato a Basilea, il più fecondo e grande del XVIII secolo. Non c'è parte della matematica in cui Eulero non abbia portato il suo contributo. Autore di numerosi trattati.

Waring Edoard (1734-1798) - Scienziato inglese, di ingegno irrequieto e di carattere sbrigativo. Titolare di cattedra universitaria, lasciò alla fine Euclide per Ippocrate, prestando servizio come medico in Cambridge.

Legendre Adrien Marie (1752-1833) - Geometra e matematico francese, docente alla Scuola Militare, poi successore di Lagrange al Bureau de Longitudes. Di ingegno versatile ed analista di grande valore, celebre per diverse opere di geometria e di matematica.


Cauchy Augustin-Louis (1789-1857) - Matematico francese, professore anche all'Università di Torino. Svolsse nel campo della matematica e della fisica un lavoro prodigioso: le sue opere complete occupano 27 volumi.

Peano Giuseppe (1858-1932) - Matematico italiano, docente di calcolo infinitesimale all'Università di Torino. lavorò in diversi campi della matematica lasciando diverse opere.


Bibliografia essenziale



- R. Cavalieri, A. Seghezza, C. Simonetti, “Matematica e Informatica 1”, Ed. Bulgarini, 1989
- AA.VV., “Dizionario dei Termini Matematici”, Ed. Rizzoli, 1987
- C. B. Boyer, “Storia della Matematica”, Ed. A. Mondadori, 1987
- A. Puppo, “Prontuario e Formulario di Matematica”, Pàtron Ed. – Bologna, 1982
- G. Lora, “Storia delle matematiche”, Ed. Cisalpino-Goliardica, 1982
- R. Courant, H. Robbins, "Che cos'è la matematica?", Volume triplo, Universale Scientifica Boringhieri, 1971
- G. Zvirner, “Algebra”, Ed. Cedam - Padova, 1971

APPROFONDIMENTI

- ✓ www.ubimath.org di Ubaldo Pernigo
- ✓  www.toomates.net di Gerard Romo
- ✓ www.chihapauradellamatematica.org Volume 1 di Giancarlo Zilio
- ✓ www.matematicamente.it Matematica C3 Algebra 1 di AA.VV.
- ✓ online.scuola.zanichelli.it/bergaminibiennio/biennio-verde/
- ✓ it.wikipedia.org/wiki/Triangolo_di_Tartaglia
- ✓ www.onlinemathlearning.com
- ✓ interactive.onlinemathlearning.com
- ✓ algebrahelp.com
- ✓ www.mathworksheetscenter.com


KEYWORDS

 *Algebra, calcolo letterale, monomio, polinomio, binomio, trinomio, prodotti notevoli, esercizi con soluzioni*

  *Algebra, Monomial, Polynomial, binomial, trinomial, perfect square trinomials, algebraic factoring, exercises with solution*

 *Algebra, Polinomio, monomio, binomio, trinomio, Igualdades notables, operaciones con polinomios,*

 *Algèbre, Polynôme, Monôme, Polynômes remarquables*

 *Algebra, Polynom, Binom*