# Frazioni

Il termine frazione deriva dal verbo frazionare e indica l'operazione di **dividere in parti uguali**.

Una frazione si scrive ponendo in basso, al di sotto di una linea orizzontale, il numero di parti uguali in cui s'intende dividere un intero e in alto, sopra la stessa linea, il numero di parti che si prendono in considerazione. La parte superiore della frazione è detta **numeratore** e la parte inferiore è detta **denominatore** e deve essere diverso da zero. La linea che separa il numeratore e il denominatore è detta **linea di frazione** $\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{d}}\right)$ e può essere orizzontale oppure inclinata ($n/d$).
Numeratore e denominatore costituiscono una coppia ordinata di numeri naturali ($\mathrm{n}, \mathrm{d} \in \mathbb{N}$), con il secondo diverso da 0 ($\mathrm{d} \neq 0$), e sono i due termini della frazione.

$$\frac{n}{d}:\ n, d \in \mathbb{N}, d \neq 0 \qquad \frac{\text{numeratore}}{\text{denominatore}}\ \text{linea di frazione} \qquad n/d$$

## Tipi particolari di frazione

| | |
|---|---|
| Le frazioni più semplici e più antiche sono le **unità frazionarie**. Un'unità frazionaria rappresenta una sola delle parti uguali in cui è stato suddiviso un intero. *Il numeratore di un'unità frazionaria è l'unità.* | $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ; |
| Una frazione si dice **PROPRIA** quando ha il numeratore minore del denominatore. *Una frazione propria è sempre inferiore all'unità (<1).* | $\frac{3}{4} < 1$ |
| Una frazione si dice **IMPROPRIA** quando ha il numeratore maggiore del denominatore. *Una frazione impropria è sempre superiore all'unità. Le frazioni improprie si possono rappresentare in forma mista, indicando gli interi che la compongono e la frazione propria corrispondenti alla parte restante.* | $\frac{5}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} > 1$ |
| Una frazione si dice **APPARENTE** quando il numeratore è uguale o multiplo del denominatore. *Una frazione apparente è pari o multipla dell'unità.* | $\frac{4}{4} = 1 \qquad \frac{8}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 1 + 1 = 2$ |
| La parte che resta per completare l'intero, data una frazione propria, è detta frazione **COMPLEMENTARE**. *Una frazione propria sommata alla sua complementare forma un intero.* | $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ |
| Data una frazione, si ottiene la sua **INVERSA** scambiando tra di loro numeratore e denominatore. *Il prodotto di una frazione data per la sua inversa è pari a 1.* | $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$ |
| Una frazione che abbia al denominatore una potenza di 10 è detta **DECIMALE**. | $\frac{1}{10}, \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}, \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}, \ldots$ |
| Una frazione che abbia al denominatore una potenza di 2 è detta **DIADICA**. | $\frac{1}{2}, \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}, \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}, \ldots$ |
| Una frazione scritta come intero più una frazione propria è detta **FRAZIONE MISTA**. Sono molte utilizzate all'estero al posto delle improprie. | $\frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ |
| Una frazione che ha come numeratore e denominatore altre frazioni è detta **FRAZIONE COMPOSTA**, **frazione di frazione**, a castello o doppia. | $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{5} : \frac{3}{4} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{15}$ |

## Frazioni e operazione di divisione

L'operazione del frazionare ci riporta all'operazione di divisione e al quoziente tra due numeri naturali. Le frazioni sono legate a quest'operazione e la rappresentano laddove l'uso dei numeri decimali sarebbe più complesso. La divisione, infatti, genera, in alcuni casi, numeri decimali illimitati, mentre la rappresentazione frazionaria mantiene una sua semplicità ed eleganza uniche.

Dal punto di vista matematico, una frazione è il quoziente tra due numeri naturali.

$$\mathbf{\frac{1}{3} = 1:3 = 0,333\ldots = 0,\overline{3} = 0,(3)}$$

| | |
|---|---|
| *Le frazioni apparenti sono uguali a uno o più interi.* | $\frac{3}{3} = 1 \quad \frac{6}{3} = 2$ |
| *Le frazioni con denominatore 1 sono uguali al numeratore.* | $\frac{3}{1} = 3$ |
| *Le frazioni con numeratore 0 e denominatore diverso da 0 sono uguali a 0.* | $\frac{0}{4} = 0$ |
| *Le frazioni con numeratore 0 e denominatore 0 sono indeterminate.* | $\frac{0}{0} \rightarrow \text{indeterminata}$ |
| *Le frazioni con denominatore 0 e numeratore diverso da 0 non hanno senso.* | $\frac{3}{0} \rightarrow \text{priva di significato}$ |

## Frazioni equivalenti

Si dicono equivalenti (~) frazioni che applicate come operatore a grandezze uguali forniscono risultati uguali.

$$\mathbf{\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4} \sim \frac{3}{6} \sim \frac{4}{8} \sim \frac{5}{10} \ldots \rightarrow \left[\frac{1}{2}\right] = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \ldots\right\}}$$

Due frazioni sono equivalenti se il prodotto del numeratore della prima e del denominatore della seconda è uguale al prodotto del numeratore della seconda e del denominatore della prima.

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}}\ \mathbf{con\ b, d \neq 0 \rightarrow a \cdot d = c \cdot} \boldsymbol{b}$$

Data una frazione se ne possono ottenere infine altre equivalenti moltiplicando numeratore e denominatore per la successione dei numeri.

L'insieme delle infinite frazioni equivalenti a una frazione data ridotta ai minimi termini costituiscono una classe di equivalenza.

## Proprietà fondamentale

Moltiplicando o dividendo entrambi i termini di una frazione per uno stesso numero, diverso da zero, si ottiene una frazione equivalente a quella data. Per dividere i termini di una frazione serve che il numero scelto oltre a essere diverso da 0 sia divisore di entrambi.

$$\frac{2}{3} \sim \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} \sim \frac{4}{6} \qquad\qquad \frac{6}{10} \sim \frac{6:2}{10:2} \sim \frac{3}{5}$$

## Riduzione di una frazione ai minimi termini

Una frazione è ridotta ai minimi termini se il numeratore e il denominatore sono primi tra di loro ($M.C.D.(a,b) = 1$).

Per ridurre una frazione ai minimi termini occorre dividere numeratore e denominatore per il loro MCD (massimo comune divisore tra numeratore e denominatore).

Quest'operazione è nota con il nome di **semplificazione**.

$$\frac{6}{10} \rightarrow M.C.D.(6,10) = 2 \rightarrow \frac{6}{10} = \frac{6:2}{10:2} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{10}_{5}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{12}{42} \rightarrow \rightarrow M.C.D.(12,42) = 6 \rightarrow \frac{12}{42} = \frac{12:6}{42:6} = \frac{2}{7} \rightarrow \frac{12}{42} = \frac{12:2}{42:2} = \frac{6:3}{21:3} = \frac{2}{7} \rightarrow \frac{\cancel{12}^{\cancel{6}^{2}}}{\cancel{42}_{\cancel{21}_{7}}} = \frac{2}{7}$$

## Ridurre frazione al loro minimo comune denominatore

Prima di ridurre due o più frazioni allo stesso minimo comune denominatore occorre accertarsi che le stesse siano ridotte ai minimi termini.

Si calcola il minimo comune multiplo dei loro denominatori (un numero intero ha denominatore 1).

Questo numero, detto **minimo comune denominatore** (m.c.d.), è il più piccolo numero che "contiene" i denominatori e questi ultimi sono tutti divisibili per esso.

Si divide, infine, il minimo comune denominatore trovato per ogni denominatore delle frazioni e si moltiplica il risultato ottenuto per il corrispondente numeratore, ottenendo in questo modo una frazione equivalente a quella data ma con denominatore pari al mcd.

Esempio 1

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{15} - \frac{1}{3}$$

$$6 = 2 \cdot 3;\ 15 = 3 \cdot 5;\ 3 = 3$$

$$m.c.d.(6,15,3) = m.c.m.(6,15,3) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{15} - \frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 10 \cdot 1}{30} = \frac{15 + 4 - 10}{30} = \frac{9}{30} \rightarrow M.C.D.(9,30) = 3 \rightarrow \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{30}_{10}} = \frac{3}{10}$$

Esempio 2

$$\frac{16}{48} = \frac{16:2}{48:2} = \frac{8:2}{24:2} = \frac{4:2}{12:2} = \frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{16}{48} = \frac{\cancel{16}^{\cancel{8}^{\cancel{4}^{\cancel{2}^{1}}}}}{\cancel{48}_{\cancel{24}_{\cancel{12}_{\cancel{6}_{3}}}}} = \frac{1}{3}$$

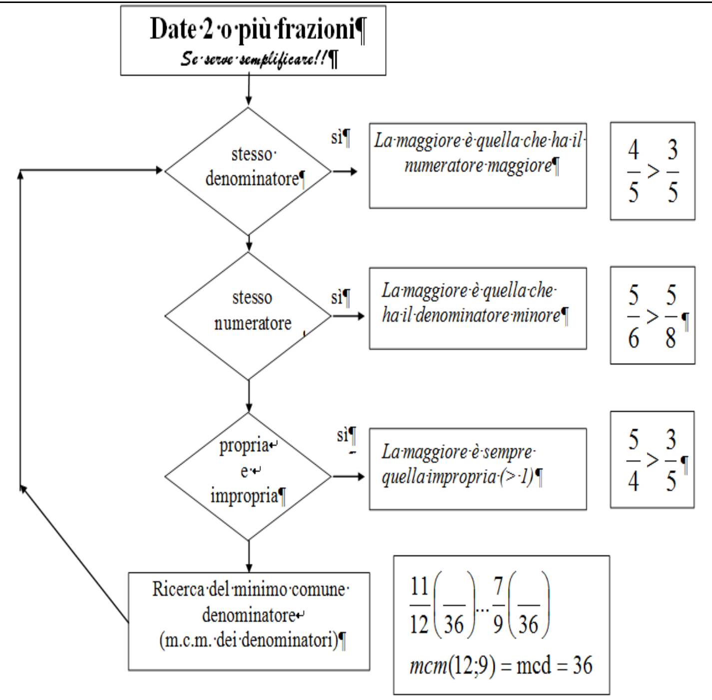
## Confronto

*"Un uomo è come una frazione il cui numeratore è quello che è, e il cui denominatore quello che pensa di sé. Più grande è il denominatore, minore la frazione." (Lev Tolstoj)*

***Frazioni con lo stesso denominatore.***
*Essendo parti uguali della medesima suddivisione di un intero è maggiore la frazione che ha il numeratore maggiore (più parti uguali prese in considerazione).*

***Frazioni con lo stesso numeratore.***
*Essendo prese in considerazione, in questo caso, le medesime parti uguali, suddivisione di un intero, sarà maggiore la frazione che ha il denominatore minore (a parità di parti di un intero sicuramente risultano parti maggiori se la divisione è stata fatta in numero minore di parti uguali).*

***Frazioni con numeratore e denominatore diversi.***
*Un confronto tra due frazioni potrà essere immediato se si confronta una frazione propria (minori di 1) e una impropria (maggiori di 1).*




***Negli altri casi e dovendo confrontare più frazioni, si conviene ridurle tutte al medesimo denominatore, fare cioè riferimento alle medesime parti uguali****. Per fare questo occorre individuare il mcm dei denominatori (mcd) e trasformare adeguatamente le frazioni (il mcd diviene denominatore della frazione e il numeratore è dato dalla divisione del denominatore per il mcd, moltiplicando tale risultato parziale per il numeratore).*
*A questo punto il confronto è ricondotto al caso di frazioni con lo stesso denominatore.*

## Metodo del prodotto incrociato

Per effettuare il confronto è possibile moltiplicare il numeratore della prima frazione per il denominatore della seconda e il numeratore della seconda frazione per il denominatore della prima.

$$\frac{a}{b} \ vs \ \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d \ vs \ c \cdot b$$

Se il primo prodotto $a \cdot d$ è maggiore del secondo $c \cdot b$ , allora la prima frazione è maggiore della seconda e viceversa. Se i prodotti coincidono le frazioni sono equivalenti.

$a \cdot d > c \cdot b$ la prima frazione è maggiore della seconda

$a \cdot d < c \cdot b$ la prima frazione è minore della seconda

$a \cdot d = c \cdot b$ le due frazioni sono equivalenti

Esempio

$\frac{3}{4} \ vs \ \frac{2}{5}$ $\quad 3 \cdot 5 > 2 \cdot 4$ $\quad$ La frazione $\frac{3}{4}$ è maggiore di $\frac{2}{5}$

$\frac{2}{3} \ vs \ \frac{4}{5}$ $\quad 2 \cdot 5 < 4 \cdot 3$ $\quad$ La frazione $\frac{2}{3}$ è minore di $\frac{4}{5}$

$\frac{11}{3} \ vs \ \frac{22}{6}$ $\quad 11 \cdot 6 = 22 \cdot 3$ $\quad$ Le frazioni sono equivalenti: $\frac{11}{3} = \frac{\cancel{22}^{11}}{\cancel{6}_{3}}$

## L’occhio di Horus (fonte de testo e dell’immagine it.wikipedia.org/wiki/Occhio_di_Horo)

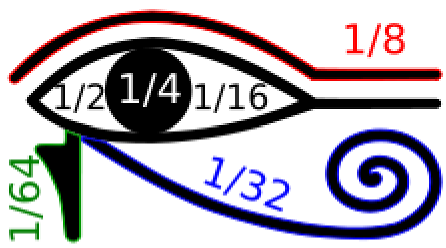
L'Occhio di Horus rappresenta nella religione egizia il simbolo della prosperità, del potere regale e della buona salute, ed è personificato dalla dea Wadjet.

Secondo la mitologia egizia, Horus volle vendicare l'uccisione del padre Osiride, perpetrata dal fratello di quest'ultimo, Seth, ma nello scontro con lo zio perse l'occhio sinistro, che si divise in sei parti.

Nella matematica egizia le parti costituenti l'udjat servivano a scrivere le frazioni, aventi il numero 64 come denominatore comune. Nella vita quotidiana, era usato come "traduzione grafica delle unità di misura dei cereali": ciascuna parte aveva un valore di frazione dell'intero, così come di rappresentazione dei sensi umani.

- La parte verso il naso rappresentava la frazione $\frac{1}{2}$ e l'olfatto (il naso);
- la pupilla rappresentava la frazione $\frac{1}{4}$ e la vista (la luce);
- il sopracciglio rappresentava la frazione $\frac{1}{8}$ e il pensiero (la mente);
- la parte verso l'orecchio rappresentava la frazione $\frac{1}{16}$ e l'udito (l'orecchio);
- la coda curva rappresentava la frazione $\frac{1}{32}$ e il gusto (il germoglio del frumento);
- il piede rappresentava la frazione $\frac{1}{64}$ e il tatto (il piede che tocca terra).

Sommando le varie parti si ha un totale di $\frac{63}{64}$: si riteneva che il restante $\frac{1}{64}$ fosse stato aggiunto dal dio Thot, sotto forma di poteri magici.




L'occhio di Horo come unità di misura.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oudjat.svg#/media/File:Oudjat.svg

## Play & Video

| | |
|---|---|
| Frazione cos'è (schooltoonchannel) | https://youtu.be/tP31VhRw6Eg |
| Frazione operatore (schooltoonchannel) | https://youtu.be/sFfZHvJ0gI8 |
| Frazione per tipo (schooltoonchannel) | https://youtu.be/L0H_cCO8_jA |
| Forma mista | https://youtu.be/EFdt4FR_s5M |
| Classificazione | https://youtu.be/pwI3vOmacP8 |
| Frazione complementare | https://youtu.be/q0ndqShHSbw |
| Vedi: | www.visualfractions.com |
| Addizione e sottrazione | https://youtu.be/Jkjm4rQgTms |
| Moltiplicazione e divisione | https://youtu.be/9B1JJJ_Po7A |
| Confronto | https://youtu.be/nejy-N6Rv-I |
| Vedi: | www.iprase.tn.it |

## Operazioni e altro materiale sulle frazioni

Vedi: https://www.ubimath.org/frazioni
Vedi: https://www.bbc.co.uk/teach

## Numeri razionali

Vedi: https://www.ubimath.org/numerirazionali/