Esiste un modo per scrivere tutte le frazioni esistenti?
La numerabilità della classe dei numeri razionali

Una delle prime scoperte del matematico Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (3 marzo 1845, Pietroburgo - 6 gennaio 1918, Halle), nella sua analisi dell'infinito, fu che la classe dei numeri razionali (insieme $\mathbb{Q}$, che contiene la classe dei numeri naturali $\mathbb{N}$ o interi come sua sottoclasse, ed è perciò essa stessa infinita) è equipotente alla classe dei numeri interi.

A prima vista sembra molto strano che la classe $\mathbb{Q}$, che è densa, possa essere sullo stesso piano della sottoclasse dei numeri interi, distribuiti in ordine sparso. In verità, non si possono disporre in ordine di grandezza i numeri razionali positivi (come per i numeri interi) dicendo che a è il primo numero razionale, b il seguente in grandezza e così via, perché tra due qualsiasi numeri razionali assegnati ce ne sono infiniti e perciò non esiste un numero razionale "seguente a" in grandezza. Ma trascurando la relazione di grandezza tra elementi successivi, è possibile ordinare tutti i numeri razionali in una sola successione, analoga alla successione dei numeri interi.

TEOREMA
L'insieme $\mathbb{Q}_a$, delle frazioni non negative, è equipotente all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.
Possiamo definire una corrispondenza uno a uno tra $\mathbb{Q}_a$ e $\mathbb{N}$, una biettività.

Ogni numero razionale può essere scritto nella forma *a/b*, dove *a* e *b* sono numeri interi e tutti i numeri razionali possono essere disposti in un quadrato in cui *a/b* occupa la *a-esima* colonna e la *b-esima* riga.

Tutti i numeri razionali positivi possono venire, quindi, ordinati secondo il seguente schema.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**...**
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	7/2	...
1/3	2/3	3/3					...
1/4	2/4	3/4					...
1/5	2/5	3/5					...
1/6	2/6	3/6					...
...	...	...					...

Percorrendo la spezzata disegnata otteniamo la successione $S_1 = \{1;\ 2;\ 1/2;\ 1/3;\ 2/2;\ 3;\ 4;\ 3/2;\ 2/3;\ 1/4;\ 1/5;\ 2/4;\ 3/3;\ 4/2;\ 5;\ \dots\}$. In questa successione cancelliamo ora tutti i numeri a/b dove a e b hanno un fattore comune, in modo che ogni numero razionale vi figuri una sola volta nella sua forma più semplice. Si ottiene così una successione S_2={1; 2; 1/2; 1/3; 3; 4; 3/2; 2/3; 1/4; 1/5; 5; ...} che contiene ogni numero razionale positivo una e una sola volta, dimostrando la numerabilità dell'insieme $\mathbb{Q}$.

Una volta dimostrata la numerabilità della classe dei numeri razionali si potrebbe supporre che ogni classe infinita sia numerabile. Cantor, con una dimostrazione per assurdo, fece la scoperta molto significativa che l'insieme di tutti i numeri reali $\mathbb{R}$ presenta un infinito radicalmente diverso da quello dei numeri interi $\mathbb{Z}$ e dei soli numeri razionali $\mathbb{Q}$.

Rielaborazione da: "Che cos'è la matematica" di P. Courant e H. Robbins, Universale scientifica Boringhieri, 1971.

Foglio di lavoro – scriviamo tutte le frazioni

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**...**
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$					...
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$						...
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$						...
$\frac{1}{\ldots}$								...
$\frac{1}{\ldots}$								...
$\frac{1}{\ldots}$								...
$\frac{1}{\ldots}$								...
$\frac{1}{\ldots}$								...

Traccia l'avvio della successione

$S_1 = \{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, 5, \qquad\qquad\qquad\qquad \}$