Dimostrare l'irrazionalità di radice quadrata di 2

All'insieme $\mathbb{Q}$, dei numeri razionali, appartengono numeri che possono essere rappresentati come frazioni nella forma m/n, con m e n che appartengono all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. I numeri che non si possono rappresentare sotto forma di frazione sono indicati come numeri irrazionali. Numeri razionali e numeri irrazionali costituiscono l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

La radice quadrata di 2, come altri radicali, è un numero irrazionale ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), soluzione dell'equazione polinomiale a coefficienti interi $x^2 - 2 = 0$.

Si può dimostrare questa proposizione ricorrendo a una dimostrazione per assurdo. Si presuppone vero che $\sqrt{2}$ possa essere espressa da una frazione, affermazione contraria all'irrazionalità della radice quadrata di 2, e si mostra che questo presupposto porta a una contraddizione.

Affermare che $\sqrt{2}$ è irrazionale significa affermare che la radice quadrata di 2 non può espressa sotto forma di frazione m/n. L'affermazione contraria della precedente presuppone che la radice quadrata di 2 può essere espressa da una frazione, ridotta i minimi termini, e che esistono due numeri naturali m e n, primi tra loro, tali che si possa scrivere la relazione seguente.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

Elevando al quadrato i due termini dell'uguaglianza ottengo la seguente relazione.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \to \frac{m^2}{n^2} = 2$$

Dalla precedente uguaglianza, ottenuta elevando tutti i termini alla seconda, segue che

$$\frac{m^2}{n^2} \cdot n^2 = 2 \cdot n^2 \to m^2 = 2 \cdot n^2$$

Possiamo osservare, prima di proseguire, che un qualsiasi numero naturale moltiplicato per 2 produce un numero pari e che un numero naturale pari qualsiasi può essere rappresentato come prodotto di 2 per un altro numero naturale. Si ha inoltre che se il quadrato di un numero naturale qualsiasi è pari lo è anche la base della potenza.

Il numero m è, quindi, pari e può essere ottenuto a sua volta come prodotto di 2 per un altro numero naturale che indichiamo con k. Sostituendo si ottengono le seguenti uguaglianze.

$$m = 2 \cdot k \to \ (2 \cdot k)^2 = 2 \cdot n^2$$

$$4 \cdot k^2 = 2 \cdot n^2$$

Le proprietà delle eguaglianze nota ci permettono di dividere entrambi i membri per 2 ottenendo

$$\frac{4 \cdot k^2}{2} = \frac{2 \cdot n^2}{2} \to 2 \cdot k^2 = n^2$$

Ne consegue che anche n^2 è pari e lo è, quindi, anche n.

Avendo presupposto che la radice quadrata di 2 possa essere espressa da una frazione m/n, ridotta i minimi termini, con m e n numeri naturali primi tra loro, e che non possono, quindi, essere entrambi pari, si ha la contraddizione con l'ipotesi di partenza.

Il radicale $\sqrt{2}$ non può essere, quindi, espresso come frazione o numero razionale. A $\sqrt{2}$ la storia assegna il primo incontro con l'irrazionalità e, in termini geometrici, rappresenta la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti unitari.

Riferimenti utilizzati e approfondimenti

Numero irrazionale (Wikipedia)
it.wikipedia.org/wiki/Numero_irrazionale

Radice quadrata di 2 (Wikipedia)
it.wikipedia.org/wiki/Radice_quadrata_di_2

Dimostrazione per assurdo (Wikipedia)
it.wikipedia.org/wiki/Dimostrazione_per_assurdo

Dimostrazione della irrazionalità di π (Wikipedia)
it.wikipedia.org/wiki/Dimostrazione_della_irrazionalit%C3%A0_di_%CF%80

Dimostrazione della irrazionalità di e (Wikipedia)
it.wikipedia.org/wiki/Dimostrazione_della_irrazionalit%C3%A0_di_e

Appunti di lezione del prof. Sisto Baldo.
Corsi PAS e TFA A059, 2014 e 2015 Università degli Studi di Verona.

Keywords

Matematica, Aritmetica, espressioni, numero irrazionale, irrazionali, numero reale, elevamento a potenza, base, esponente, potenza, proprietà delle potenze, estrazione di radice quadrata, radicali, estrazione di radice, radice quadrata, quadrati perfetti, radice quadrata a mano, I, radq(), Nepero

Math, Arithmetic, Expression, Irrational number, Real number, Arithmetic Operations, Raise to a Power, base, exponent, power, Solved expressions with raise to a power, square root, roots, sqr(), sqrt()

Matemática, Aritmética, potencia, expresiones, potencias, propiedades de las potencias, Potencias y expresiones, Raíz, Raíz cuadrada, logaritmo

Mathématique, Arithmétiq ue, Expression, Exercices de calcul et expression avec des puissances, propriété des puissances, Racine, Racine carrée, logarithme

Mathematik, Arithmetik, Potenz, Rechenregeln, Allgemeinere Basen, Allgemeinere Exponenten, Radizierung, Quadrat-Radizierung, Basen, Exponenten, Radizierung, Quadrat-Radizierung, Logarithmus