EQUAZIONI DI SECONDO GRADO A UNA INCOGNITA

SECOND DEGREE EQUATIONS - RESOLUTION DES EQUATIONS DU SECOND DEGRE

EQUAZIONI

Una **equazione** è una uguaglianza tra due espressioni algebriche, in una o più variabili, che risulti verificata solamente per particolari valori attribuiti alle variabili che in essa figurano.

I termini numeri presenti in una equazione prendono il nome di **termini noti**.

Si chiamano **radici** o **soluzioni** dell'equazione i particolari valori attribuiti alle variabili che in essa figurano.

Due equazioni sono **equivalenti** quando hanno la stessa radice.

L'equazione ha soluzione vera solo per $x = 6$. I termini incogniti sono $7x$ e $5x$. I termini noti sono -5 e 7.	$\underbrace{7x \;\; -5}_{1o\ membro} = \underbrace{5x+7}_{2o\ membro}$

Una equazione è detta **numerica** se in essa non figurano altre lettere oltre l'incognita.

Una equazione è detta **letterale** se oltre l'incognita figurano altre lettere.

Una equazione è detta **intera** se l'incognita non figura al denominatore.

Una equazione è detta **fratta** se l'incognita figura anche, o solo, al denominatore.

Il **grado** di una equazione è dato dal grado massimo dell'incognita presente nell'equazione.

Il grado di una equazione è pari al numero delle possibili soluzione dell'equazione stessa.

Un'**equazione di secondo grado** o quadratica è un'equazione algebrica a una sola incognita e con l'incognita che compare con grado 2.

Applicando le proprietà delle equazioni è sempre possibile ricondurre un'equazione di secondo grado nella sua **forma normale** o canonica.

$ax^2 + bx + c = 0$

Le lettere a, b e c rappresentano numeri reali o espressioni letterali e sono indicati come *primo, secondo e terzo coefficiente* dell'equazione di secondo grado espressa in forma normale.

La lettera c è indicata anche come *termine noto* dell'equazione.

Nel piano cartesiano il grafico della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ è una **parabola**.
Se $a > 0$ la parabola avrà la concavità rivolta verso l'alto, se $a < 0$ la parabola avrà la concavità rivolta verso il basso.

SOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

Data la forma normale $ax^2 + bx + c = 0$ occorre distingue diversi casi secondo che siano presenti o meno alcuni o tutti i suoi termini.

equazione	termini	Forma
Equazione monomia	$b = 0$ $c = 0$	$ax^2 = 0$
Equazione spuria	$c = 0$	$ax^2 + bx = 0$
Equazione pura	$b = 0$	$ax^2 + c = 0$
Equazione completa o canonica		$ax^2 + bx + c = 0$

EQUAZIONE MONOMIA $ax^2 = 0$

L'equazione monomia ha radice nulla ovvero due soluzioni reali che coincidono $x_1 = x_2 = 0$.

$$ax^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{a} = 0$$

$$x = 0$$

EQUAZIONE SPURIA $ax^2 + bx = 0$

L'equazione spuria ha due soluzioni distinte:

$$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}$$

Si ha, infatti, che

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0$$

Essendo il prodotto uguale a zero, per la legge di annullamento del prodotto, almeno uno dei due fattori deve essere zero.

$ax + b = 0$ oppure $x = 0$

L'equazione è ricondotta alla risoluzione di due equazioni di primo grado di cui una a soluzione nulla: $x = 0$. L'altra soluzione è:

$$x = -\frac{b}{a}$$

ESEMPIO

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2 \ \vee \ x = 0$$ [1]

[1] ∨ simbolo per l'OR logico (o).

EQUAZIONE PURA $ax^2 + c = 0$

L'equazione spuria ha due soluzioni distinte.

$$ax^2 + c = 0$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

Se a e c sono discordi si hanno due radici reali opposte che si ottengono estraendo la radice quadrata del rapporto tra il termine noto e l'opposto del primo coefficiente.

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Se a e c sono concordi il secondo membro è negativo in quanto la frazione è preceduta dal segno meno, di conseguenza non si hanno radici reali essendo il primo membro positivo.

EQUAZIONE COMPLETA O CANONICA $ax^2 + bx + c = 0$

L'equazione spuria ha due soluzioni distinte.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se il coefficiente di b è pari si può usare la seguente formula ridotta:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

Il radicando $b^2 - 4ac$ della radice quadrata si chiama **discriminante** o delta ($\Delta = b^2 - 4ac$) dell'equazione in forma canonica $ax^2 + bx + c = 0$.

Poiché il radicando di una radice quadrata è un numero reale se non è negativo ne consegue che l'equazione ha radici reali se il discriminante è positivo o nullo, diversamente le radici sono immaginarie.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Con $\Delta > 0$ l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte: x_1 e x_2.

Con $\Delta = 0$ l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti: $x_1 = x_2$.

Con $\Delta < 0$ l'equazione non ammette soluzioni reali ma complesse e coniugate.

ESEMPIO 1

$2x^2 - 4 = 0$

Equazione pura

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} = \pm\sqrt{\frac{4}{2}} = \pm\sqrt{2} \rightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

ESEMPIO 2

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 40 = 9$

Con $\Delta > 0$ *l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte:* x_1 *e* x_2.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \rightarrow x = 5 \vee x = 2$$

ESEMPIO 3

$4x^2 - 8x + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 64 = 0$

Con $\Delta = 0$ *l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti:* $x_1 = x_2$.

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{4} = 1$$

ESEMPIO 4

$x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8$

Con $\Delta < 0$ *l'equazione non ammette soluzioni reali ma complesse e coniugate.*

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 3}}{1} = 1 \pm \sqrt{-2} \rightarrow 1 + \sqrt{2} \cdot i \vee 1 - \sqrt{2} \cdot i$$

RELAZIONI TRA COEFFICIENTI E RADICI

Se le radici di un'equazione di secondo grado in forma normale sono reali ($\Delta \geq 0$) e ne calcoliamo la somma $x_1 + x_2$ dalle radici ottenute dalla formula risolutiva otteniamo

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Se le radici sono reali ($\Delta \geq 0$) e ne calcoliamo il prodotto $x_1 \cdot x_2$ dalle radici ottenute dalla formula risolutiva otteniamo

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Queste relazioni permettono in particolari casi di risolvere problemi relativi a equazioni di secondo grado senza ricorrere alla formula risolutiva.

Infatti basta cercare quei numeri la cui somma e il cui prodotto corrispondano ai numeri ottenuti mediante le relazioni. Se le soluzioni sono intere è agevole applicare questo metodo.

ESEMPIO

Ho un'equazione di secondo grado e una sua radice è nota.

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad x_1 = -3$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \to -3 + x_2 = -\frac{1}{1} \to x_2 = -1 + 2 = 2$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO IN FORMA NORMALE E RELAZIONE TRA I COEFFICIENTI

Se le radici di un'equazione di secondo grado in forma normale sono reali ($\Delta \geq 0$) è possibile sostituire al secondo e terzo coefficiente le relazioni prima viste.

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \rightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a(x_1 \cdot x_2) = 0$$

Se il primo coefficiente è 1 l'equazione precedente diventa

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

ESEMPIO

$$-x^2 - x + 2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{-1} = -1$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{-1} = -2$$

Questo consente, ad esempio, di scrivere un'equazione di secondo grado nota la somma e il prodotto di due numeri, radici dell'equazione desiderata.

SCOMPOSIZIONE DI UN TRINOMIO DI SECONDO GRADO

Le relazioni precedenti consentono, inoltre e se possibile, di scomporre un trinomio di secondo grado.

$$ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a(x_1 \cdot x_2) = 0$$

$$a(x^2 - xx_1 - x_2x + x_1x_2) = 0$$

Applicando la scomposizione a fattore parziale

$$a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = 0$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Se il discriminante dell'equazione è negativo allora il trinomio non si può scomporre ed è detto irriducibile.

REGOLA DI CARTESIO PER I SEGNI DELLE SOLUZIONI DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

La regola di Cartesio permette di ricavare i segni delle soluzioni di un'equazione di secondo grado senza risolverla.

Se le radici di un'equazione di secondo grado in forma normale sono reali ($\Delta \geq 0$), si indica come una permanenza il fatto che due coefficienti consecutivi sono concordi e si indica come una variazione se sono discordi.

Esempio

$$5x^2 \quad \underbrace{+}_{++permanenza} \quad 4x \quad \underbrace{-}_{\pm variazione} \quad 1$$

La regola di Cartesio afferma che se le radici di un'equazione di secondo grado in forma normale sono reali ($\Delta \geq 0$), a ogni permanenza corrisponde una radice negativa e a ogni variazione una radice positiva.

ESEMPIO

$$5x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow una\ permanenza\ e\ una\ variazione \rightarrow x_1 = \frac{1}{5} \vee x_2 = -1$$

$$x^2 - 5x + 6 \rightarrow due\ variazioni \rightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = 2$$