La divisibilità

Dato un numero a, ogni numero divisibile per a è detto suo **multiplo**; ogni numero per il quale a è divisibile è detto suo **divisore**.

I multipli di un numero di determinano moltiplicando il numero stesso per ogni termine della successione dei numeri naturali, escluso lo zero, o anche sommando se stesso alla somma precedente a formare una serie.

Esempio
$M(4) = \{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, 4 \cdot 3, 4 \cdot 4, \ldots, 4 \cdot n\}$
$M(4) = \{4, 8, 12, 16, \ldots\}$

I multipli di un numero sono infiniti.

$\boldsymbol{M(n) \geq n}$ **cardinalità** $\boldsymbol{M(n) = \infty}$

Quando la divisione fra un numero a e un numero b dà resto zero si dice che b è divisore di a.
I divisori di un numero coincidono con i suoi sottomultipli.

In generale, per valori che non siano zero, di due numeri m e n, m divide n, si indica con $m|n$.

Esempio
$D(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

Il numero 6 è un divisore di 24 perché 24 : 6 = 4, quindi si può affermare che $3|24$. Può altresì essere detto che 24 è divisibile per 6, 24 è un multiplo di 6, 6 divide il 24 o che 6 è un fattore di 24.

E' evidente che i divisori di un numero sono finiti e compresi tra 1 e il numero stesso.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \ 1 \leq D(n) \leq n$

Un qualsiasi numero ammette come divisori banali l'unità e il numero stesso.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \ 1|n\ e\ n|n$

Esempio
$D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
$1 \leq D(24) \leq 24$ $1|24\ e\ 24|24$

Un numero uguale alla somma dei suoi divisori, escluso se stesso, è detto **numero perfetto.**

Esempio: 6=1+2+3.

Un numero minore della somma è detto **numero difettivo** (Esempio: 10>1+2+5), quello maggiore della somma dei suoi divisori escluso se stesso è detto **numero abbondante** (Esempio: 12<1+2+3+4+6).

Sono numeri **amicabili** o **amici** quelli per cui la somma dei divisori di uno, escluso il numero stesso, è uguale all'altro e viceversa.

Esempio
$\boldsymbol{D(220) = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220\}}$
$\boldsymbol{D(284) = \{1, 2, 4, 71, 142, 284\}}$
$\boldsymbol{1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284}$
$\boldsymbol{1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220}$

Dalla divisione di due numeri a e a' per uno stesso numero b si ottengono resti uguali se, e soltanto se, la differenza $(a - a')$ è divisibile per b.

Numeri primi e numeri composti

I numeri naturali maggiori di uno che ammettono come divisori solo l'unità e il numero stesso sono detti **numeri primi** (o anche *semplice*).

Quando un numero non è primo, ammette altri divisori oltre a quelli banali; un tale numero viene detto **numero composto**.

Il numero 1 non è considerato un numero primo.

Il numero 0 non è primo ammettendo infiniti divisori.

L'unico numero primo pari è 2.

Esistono infiniti numeri primi (dobbiamo a Euclide la prima dimostrazione "per assurdo" di questo asserto). Il **teorema dell'infinità numeri primi** esprime che, per quanto grande si scelga un numero naturale n, esiste sempre un numero primo maggiore di n.

La loro importanza in matematica è enorme e deriva dal **teorema fondamentale dell'aritmetica.**

Teorema fondamentale dell'aritmetica.

Qualsiasi numero può essere scomposto in fattori primi e tale scomposizione è unica a meno dell'ordine dei fattori.

Due **numeri primi gemelli** sono numeri primi che differiscono tra loro di due (esempio {5, 7} e {11, 13}). Fatta eccezione per la coppia (2, 3), questa è la più piccola differenza possibile fra due primi.
>> it.wikipedia.org/wiki/Numero_primo_gemello Sequenza OEIS: oeis.org/A001097

Una sequenza di quattro numeri primi, consistente in due coppie di numeri primi gemelli separate solo da tre non-primi, è detta **quadrupla di primi** (esempio {5, 7, 11, 13}).
Sequenza OEIS: https://oeis.org/A007530

Due **numeri primi cugini** sono numeri primi che differiscono tra loro di quattro (esempio: 3 e 7).
>> it.wikipedia.org/wiki/Numeri_primi_cugini. Sequenza OEIS: oeis.org/A023201

Due **numeri primi sexy** sono numeri primi che differiscono di sei (esempio: 5 e 11).
>> it.wikipedia.org/wiki/Numeri_primi_sexy. Sequenza OEIS: oeis.org/A023200

Matematica e storia

***Crivello di Eratostene**. Porta questo nome un metodo per la ricerca dei numeri primi noto fin dall'antichità.*
Eratostene (275-195 a.C.), grande matematico e geografo (direttore della biblioteca di Alessandria), elaborò un procedimento per la ricerca dei numeri primi (it.wikipedia.org/wiki/Crivello_di_Eratostene).
Il metodo consiste nell'eliminare da un'opportuna griglia contenete un intervallo di numeri naturali i multipli dei numeri primi (prima quelli di 2, poi quelli di 3, ...) in modo che alla fine quelli che restano sono appunto solo numeri primi.
Si può provare che il procedimento di setacciatura per ricercare i primi fino a un certo numero n può essere interrotto quando si supera la radice quadrata di n.

Notevoli sforzi sono stati fatti per cercare delle formule generatrici di numeri primi. Fermat (1601-1665) formulò, nel 1640, l'ipotesi che i numeri nella forma $F(n) = ((2)^2)^n + 1$
detti numeri di Fermat(it.wikipedia.org/wiki/Numero_di_Fermat) , siano primi.

Nel 1732 Eulero scoprì che $((2)^2)^5 + 1 = 641 \times 6700417$*, quindi F(5) non è primo.*
Un'altra notevole espressione che dà origine a numeri primi è $f(n) = n^2 - n + 41$
ma per n = 41 si ottiene un numero non primo.
Lo stesso vale per l'espressione $f(n) = n^2 - 79n + 1601$ *che cade per n=80.*

La congettura di Goldbach, tutt'ora irrisolta, afferma che ogni numero pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi (lo stesso numero primo può essere usato due volte).
Congettura di Goldbach: it.wikipedia.org/wiki/Congettura_di_Goldbach.

Insomma non tutto è stato ancora trovato e provato. Datevi da fare.

Alcuni criteri di divisibilità

Esistono alcune regole utili e d'immediata applicazione per trovare alcuni piccoli divisori di un numero analizzando le sue cifre.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un numero sia divisibile per

2 è che sia divisibile per 2	la cifra delle sue unità (finisce per *0, 2, 4, 6 o 8*)

3 è che sia divisibile per 3	la somma delle sue cifre
	`Esempio`
	`132 è divisibile per 3 se lo è 1+2+3=6 che è divisibile per 3 dunque lo è anche il numero 132.`

5 è che sia divisibile per 5	la cifra delle sue unità (finisce per 0 o 5)

7 è che sia divisibile per 7	- la differenza fra la somma dei numeri che, scomposto quello dato in gruppi di 3 cifre ognuno (a partire da destra), occupano posto pari, e la somma dei numeri analoghi, che occupano posto dispari
	- la differenza che si ottiene, per numeri di almeno tre cifre, tra il resto delle cifre e il doppio delle unità (numeri con più di due cifre)
	`Esempio`
	`10626 è divisibile per 7 se lo è il numero 1062-2*6=1050; questo è divisibile per 7 se lo è il numero 105-2*0=105; questo è divisibile per 7 se lo è 10-10=0 che è divisibile per 7 dunque lo è anche il numero 10626.`

11 è che sia divisibile per 11	la differenza fra la somma delle cifre di posto pari (a partire da destra), e quelle di posto dispari
	`Esempio`
	`121 è divisibile per 11 se lo è (1+1)-2=0 che è divisibile per 11 dunque lo è anche il numero 121.`

13 è che sia divisibile per 13	la somma fra il numero privato dell'ultima cifra e il quadruplo dell'ultima cifra stessa.
	`Esempio`
	`91 è divisibile per 13 se lo è il numero 9+1*4=13.`

un numero con più di due cifre è divisibile per 17	se la differenza (presa in valore assoluto), fra il numero ottenuto eliminando la cifra delle unità e il quintuplo della cifra delle unità è 0, 17 o un multiplo di 17
	(numeri con più di due cifre)
	`Esempio`
	`2584 è divisibile per 17 se lo è il numero 258-5*4=238; questo è divisibile per 17 se lo è il numero 23-5*8=17`

un numero è divisibile per 19	se in esso la differenza fra le sue cifre prima dell'ultima moltiplicate per nove e l'ultima è uguale a 0, 19, o un multiplo di 19.
	`Esempio`
	`817 è divisibile per 19 perché lo è 81 x 9 - 7`

23 è che sia divisibile per 23	la somma del numero delle decine e del settuplo del numero delle sue unità

un numero è divisibile per 29	se lo è anche la cifra delle decine sommato al triplo della cifra delle sue unità
	`Esempio`
	`261 lo è in quanto 26 + 3*1 = 29`
	se in questo la differenza fra le sue cifre precedenti l'ultima e l'ultima moltiplicata per 26 è uguale a 0, 29 o un multiplo di 29
	`Esempio`
	`969 è divisibile per 29 perché lo è 96 - 9 x 26`

37 è che sia divisibile per 37	il numero somma dei numeri ottenuti scomponendo quello dato in gruppi di tre cifre (a partire da destra)
	`Esempio`
	`3737 è divisibile per 37 se lo è il numero 737+3=740…`

La scomposizione in fattori primi o fattorizzazione

Il procedimento tramite il quale si ricercano i numeri primi divisori di un numero dato viene chiamato **scomposizione in fattori primi** o **fattorizzazione**. Questo procedimento ha senso per i numeri composti e non per quelli primi.

Per il teorema fondamentale dell'aritmetica, ogni numero intero n maggiore di 1 può essere scomposto in un prodotto di primi in una sola maniera.

Per il teorema della scomposizione in fattori primi, infatti, ogni numero intero positivo diverso da 1 può essere espresso come prodotto di numeri primi in modo tale che

$$n = p_1^{a1} \cdot p_2^{a2} \cdot \ldots \cdot p_m^{am}$$

dove $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sono i numeri primi ordinati in modo che $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ e dove $a1, a2, \ldots, am$ sono gli esponenti interi positivi.

Regola pratica

Si utilizzano i criteri di divisibilità e per divisioni successive, a partire dai numeri primi più piccoli (2, 3, 5, ...), si stabiliscono quei fattori primi che moltiplicati tra di loro danno il numero dato.

Esempio

```
2250 | 2
1125 | 3
 375 | 3
 125 | 5
  25 | 5 x 5
   1 |
```

$$2250 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$$

Per scomporre in fattori primi un numero, lo si divide per il più piccolo numero primo che sia suo divisore, si divide quindi il quoziente ottenuto per il più piccolo numero primo che sia suo divisore e così via fino ad avere come quoziente 1. Il numero è uguale al prodotto di tutti i numeri primi scritti a destra come divisori.

Per i numeri divisibili per 10, 100, 1000, …, è possibile abbreviare la fattorizzazione indicando per ogni zero terminale una coppia 2 per 5.

```
2200 | 2x5
 220 | 2x5
  22 | 2
  11 | 11
   1 |
```

oppure

```
2200 | 2²x5²
  22 | 2
  11 | 11
   1 |
```

$$2200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11$$

Tabella dei numeri primi

Sui libri di testo, sui formulari, le tavole e on line è possibile trovare tavole dei numeri primi più o meno ricche. La loro disponibilità aiuta nella fattorizzazione.

>> it.wikipedia.org/wiki/Lista_di_numeri_primi

Ricerca dei divisori

1. Si scompone il numero dato in fattori primi con il metodo della fattorizzazione.
2. Si costruisce una tabella scrivendo nella prima riga tutte le potenze del primo fattore (a partire da quella con esponente 0 fino a raggiungere la potenza in cui esso compare nella scomposizione), nella seconda riga, nello stesso modo, tutte le potenze del secondo fattore e così via fino a esaurire i fattori.
3. Si moltiplicano i numeri della prima riga, in successione, per tutti i numeri della seconda.
4. Si moltiplicano i numeri ottenuti per ciascun numero della terza riga. Si prosegue in questo modo moltiplicando i numeri ottenuti per la quarta riga e così di seguito fino a esaurire le righe.

Esempio 1

1. $24 = 2^3 \cdot 3$

2. $2^0; 2^1; 2^2; 2^3$ 1 ; 2; 4; 8
   $3^0; 3^1$ 1; 3

3. (1 ; 2; 4; 8) ·
   (1; 3) =

   (1; 2; 4; 8; 3; 6; 12; 24)

Esempio 2

1. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

2. $2^0; 2^1; 2^2; 2^3$ 1 ; 2; 4; 8
   $3^0; 3^1; 3^2$ 1; 3; 9
   $5^0; 5^1$ 1; 5

3. (1 ; 2; 4; 8) ·
   (1; 3; 9) =

   (1; 2; 4; 8; 3; 6; 12; 24; 9; 18; 36; 72) ·
   (1; 5) =

   1;2;4;8;3;6;12;24;9;18;36;72; ->
   5;10;20;40;15:30;60;120;45;90;180:360

Il numero n dei divisori di un numero x di cui si dispone della fattorizzazione è dato dal prodotto degli esponenti dei fattori ottenuti a cui va sommato 1.
$x = a^m \cdot b^n \cdot a^p \cdot \ldots$ $n = (m+1) \cdot (n+1) \cdot (p+1) \cdot \ldots$

Esempio 3

$24 = 2^3 \cdot 3$ ha $(3+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 2 = 8$ diversi divisori

Esempio 4

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ ha $(3+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ diversi divisori

Criterio generale di divisibilità

Per stabilire se due numeri sono tra loro divisibili, se ne può ricercare il quoziente tramite una semplice divisione. Alla stessa conclusione si poteva pervenire utilizzando i fattori primi e facendo riferimento alla regola generale, che prende il nome di **criterio generale di divisibilità**.

Due numeri sono divisibili se, scomposti in fattori primi, nel primo numero appaiono almeno tutti i fattori del secondo con esponente maggiore o uguale a quello con cui compaiono nel secondo.

Il quoziente di due numeri divisibili, scomposti in fattori primi, è dato dal prodotto di tutti i fattori del dividendo aventi come esponente la differenza degli esponenti con cui i fattori compaiono nel dividendo e nel divisore.

Esempio

$19404 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$

$294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$

$19404: 294 = 66\, resto\ 0$

$19404 : 294 = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11) : (2 \cdot 3 \cdot 7^2) = 2^{2-1} \cdot 3^{2-1} \cdot 7^{2-2} \cdot 11 = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$

Lo stesso risultato si ottiene applicando alla divisione la proprietà invariantiva.

$19404 :\ 294$
$\downarrow : 2 \quad \downarrow : 2$
$9702 :\ 147$
$\downarrow : 3 \quad \downarrow : 3$
$3234 :\ 49$
$\downarrow : 7 \quad \downarrow : 7$
$462 :\ 7$
$\downarrow : 7\ \downarrow : 7$
$66 : 1 = 66$

Lo stesso risultato si ottiene applicando sulla frazione la proprietà invariantiva.

Esempio

$$\frac{19404}{294} = \frac{(2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11)}{(2 \cdot 3 \cdot 7^2)} = 2^{2-1} \cdot 3^{2-1} \cdot 11 = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$$

Massimo Comune Divisore (M.C.D.)

Dati due o più numeri a, b, ... è detto *massimo comun divisore* il maggiore fra i divisori comuni di essi.

Se il M.C.D. di due o più numeri è l'unità, questi sono detti coprimi o primi fra loro.

Il M.C.D. tra due numeri di cui uno solo è zero esiste.

Se a=0 e b=0 non è possibile calcolare M.C.D.(a, b).
Se a è diverso da zero e b=0 M.C.D.(a, b) = a.
Se a=0 e b è diverso da zero M.C.D.(a, b) = b.

Ricerca del Massimo Comune Divisore (M.C.D.)

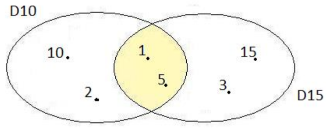
Esistono diversi sistemi per la ricerca del M.C.D. tra due o più numeri.

Metodo grafico insiemistico

Trovati gli insiemi dei divisori dei numeri dati, il M.C.D. è dato dall'elemento maggiore di quelli risultanti dall'intersezione degli insiemi dei divisori.

Questo metodo, intuitivo e didattico, risulta però problematico per numeri grandi, essendo richiesti molti calcoli per la ricerca dei divisori quanti i fattori primi sono diversi e con esponenti elevati.

$D_{10} = \{1; 2; 5; 10\}$
$D_{15} = \{1; 3; 5; 15\}$
$\boldsymbol{D_{10} \cap D_{15}} = \{\mathbf{1}; \mathbf{5}\}$



Mediante scomposizione in fattori primi

Il M.C.D. di più numeri dati è il prodotto dei fattori primi a essi comuni, ognuno preso con il minimo esponente che gli compete.

Anche questo metodo è utilizzabile, nella pratica, solo per numeri piccoli. La scomposizione in fattori primi di un numero richiede, infatti, troppo tempo.

Esempio 1

$56 = 2^3 \cdot 7 \qquad 140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \qquad M.C.D.(56{,}140) = 2^2 \cdot 7 = 28$

Se 28 è M.C.D. tra 56 e 140 allora

$56 : 28 = (2^3 \cdot 7) : (2^2 \cdot 7) = 2^{3-2} \cdot 7^{1-1} = 2 \cdot 1 = 2$

$140 : 28 = (2^2 \cdot 5 \cdot 7) : (2^2 \cdot 7) = 2^{2-2} \cdot 5 \cdot 7^{1-1} = 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5$

Esempio 2

$20 = 2^2 \cdot 5 \qquad 15 = 3 \cdot 5 \qquad 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

$M.C.D.(20, 15, 14) = 5$

Caso particolare $\quad 15 = 3 \cdot 5$ e $16 = 2^4$ abbiamo $M.C.D.(15{,}16) = 1 \Rightarrow$ 15 e 16 sono **coprimi**

Metodo di Euclide o delle divisioni successive **(* è disponibile un apposito documento su questo metodo)**

1. Si divide il maggiore per il minore, arrestando la divisione al quoziente intero.
2. Si divide poi nello stesso modo il minore dei due numeri per il resto trovato.
3. Si divide questo primo resto per il successivo, e così via. L'ultimo resto trovato (diverso da 0) è il M.C.D. cercato.

Se i numeri sono più di due, si cerca prima il M.C.D. fra due di essi; si cerca poi il MDC tra il M.C.D. trovato e il terzo numero; e così via. L'ultimo M.C.D. trovato è quello di tutti i numeri dati.

M.C.D.(350, 225) = 4 perchè 350 : **225** = 1 resto **125** **225** : **125** = 1 resto 100 **125** : 100 = 1 resto 25 100 : 25 = **4** resto 0 $a = b \cdot q + r$ 350 : 25 = 14 resto 0! 225 : 25 = 9 resto 0!	350 - **225** = **125** **225** - **125** = 100 **125** - 100 = 25 100 - 25 = **75** **75 – 25 = 50** **50 - 25 = 25** **25 - 25 =0**

Minimo Comune Multiplo (m.c.m.)

Dati due o più numeri *a*, *b*, ... è detto *minimo comune multiplo* il minore dei loro multipli comuni.

Ricerca del Minimo Comune Multiplo (m.c.m.)

Esistono diversi sistemi per la ricerca del m.c.m. tra due o più numeri.

Metodo grafico insiemistico

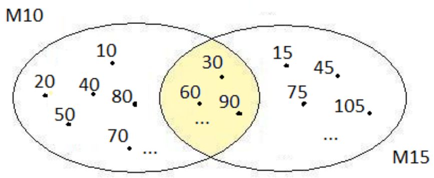
Trovati gli insiemi dei multipli dei numeri dati, il m.c.m. è dato dall'elemento minore di quelli risultanti dall'intersezione degli insiemi.

Questo metodo, intuitivo e didattico, risulta però problematico per numeri grandi, essendo l'insieme dei multipli infinito e lungo da determinare anche parzialmente.

$M_{10} = \{10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; \dots\}$

$M_{15} = \{15; 30; 45; 60; 75; 90; 105; \dots\}$

$\boldsymbol{M_{10} \cap M_{15} = \{30; 60; 90; \dots\}}$



Mediante scomposizione in fattori primi

Il m.c.m. di più numeri dati è il prodotto dei fattori primi a essi comuni e non comuni, ognuno preso con il massimo esponente che gli compete.

Esempio 1

$40 = 2^3 \cdot 5 \qquad 48 = 2^4 \cdot 3 \qquad m.c.m.(40,48) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$

Se 240 è m.c.m. tra 40 e 48 allora

$240 : 40 = (2^4 \cdot 3 \cdot 5) : (2^3 \cdot 5) = 2^{4-3} \cdot 3 \cdot 5^{1-1} = 2 \cdot 3 = 6$

$240 : 48 = (2^4 \cdot 3 \cdot 5) : (2^4 \cdot 3) = 2^{4-4} \cdot 3^{1-1} \cdot 5 = 5$

$15 = 3 \cdot 5 16 = 2^4 \qquad M.C.D.(15,16) = 1; 15\ e\ 16\ coprimi$

Esempio 2

$20 = 2^2 \cdot 5 \qquad 15 = 3 \cdot 5 \qquad 14 = 2 \cdot 7$

$m.c.m.(20, 15, 14) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 700$

Noto il M.C.D. è possibile trovare il m.c.m.

Dati due numeri a e b qualsiasi e noto il loro M.C.D. ($MCD(a, b)$) il loro m.c.m. è dato dal loro prodotto diviso per il loro M.C.D..

$$m.c.m.(a, b) = \frac{a \cdot b}{M.C.D.(a, b)} \qquad m.c.m.(12,15) = \frac{12 \cdot 15}{3} = 12 \cdot 5 = 60$$

Minimo comune multiplo, minimo comune denominatore e frazioni

Il minimo comune multiplo è utilizzato per determinare il denominatore in operazioni di somma o di differenza di frazioni. Il denominatore della frazione risultante è, infatti, il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni date.

$$frazione \rightarrow \frac{numeratore}{denominatore}$$

$$\frac{1}{2}\ vs\ \frac{1}{3} \rightarrow m.c.d.(2, 3) = 6 \rightarrow \frac{6 : 2 \cdot 1}{6} = \frac{3}{6}\ vs\ \frac{6 : 3 \cdot 1}{6} = \frac{2}{6}$$

Problemi di minimo e massimo

In diversi casi pratici trovano applicazione i metodi del massimo comune divisore M.C.D. (problemi di massimo) e del minimo comune multiplo m.c.m. (problemi di minimo).

Vediamo con delle esemplificazioni tali situazioni e come operare per la loro soluzione.

Una volta individuato il tipo è possibile procedere con i diversi metodi utilizzabili (metodo insiemistico, con la fattorizzazione e con l'algoritmo Euclide per il M.C.D.).

Problema di Massimo	Problema di minimo
Divisori -> Massimo tutti i numeri sono divisibili per 1 (divisore banale)	**Multipli -> minimo** i multipli sono infiniti e trovare il più grande è …
Disponendo di 24 rose rosse e 60 rose gialle, quanti diverse composizioni potrai fare e quale sarà la loro composizione?	*Mao e Titti si trovano oggi a Verona. Se Mao ripassa tra 6 giorni e Titti ripassa da Verona tra 9 giorni quando si ritroveranno?*
D_{24} = {**1**, **2**, **3**, **4**, **6**, 8, **12**, 24} D_{60} = {**1**, **2**, **3**, **4**, 5, **6**, 10, **12**, 15, 20, 30, 60} $D_{24} \cap D_{60}$ = {1, 2, 3, 4, 6, **12**}	M_6 = {6, 12, **18**, 24, 30, **36**, 42, 48, **54**, 60, 66, **72**, …} M_9 = {9, **18**, 27, **36**, 45, **54**, 63, **72**, 81, 90, 99, 108, …} $M_6 \cap M_9$ = {**18**, 36, 54, 72, …}
$24 = 2^3 \cdot 3$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ M.C.D.(24, 60) = 2^2 3 = **12** Considerando solo i fattori comuni presi una sola volta con l'esponente minore.	$6 = 2 \cdot 3$ $9 = 3^2$ m.c.m.(24, 60) = 2 3^2 = **18** Considerando tutti i fattori, prendendo quelli comuni presi una sola volta con l'esponente maggiore.
Algoritmi di Euclide 60 - 24 = 36 36 – 24 = 12 24 – 12 = **12** M.C.D. (60, 24) 12 – 12 = 0	
12 mazzetti Composizione Rose rosse = 24/12 = **2** - Rose bianche = 60/12 = **5**	S'incontrano dopo 18 giorni.

NB: Ricerca dei divisori

$24 = 2^3$ 3

1 – 2 – 4 – 8
1 – 3

1 – 2 – 4 – 8 – 3 – 6 – 12 – 24

$60 = 2^2$ 3 5

1 – 2 – 4
1 – 3
1 – 2 – 4 – 3 – 6 – 12
1 – 5
1 – 2 – 4 – 3 – 6 – 12 – 5 – 10 – 20 – 15 – 30 – 60

Approfondimenti

	Approfondimenti e esercizi guida risolti su UbiMath	www.ubimath.org
WIKIPEDIA L'enciclopedia libera	Terne pitagoriche	it.wikipedia.org/wiki/Divisibilit%C3%A0 it.wikipedia.org/wiki/Divisore#Regole_per_piccoli_divisori it.wikipedia.org/wiki/Numero_primo it.wikipedia.org/wiki/Numero_primo_gemello it.wikipedia.org/wiki/Numeri_primi_cugini it.wikipedia.org/wiki/Numeri_primi_sexy it.wikipedia.org/wiki/Crivello_di_Eratostene it.wikipedia.org/wiki/Tavola_dei_divisori http://it.wikipedia.org/wiki/Tavola_dei_fattori_primi
The Prime Pages prime number research, records, and resources	The Prime Pages. *Prof. C. Caldwell* University of Tennessee at Martin	primes.utm.edu
Math Goodies™ Your Destination for Math Education!	Number Theory - Math Goodies	www.mathgoodies.com
Matematicamente.it	Insiemi numerici	www.matematicamente.it/staticfiles/formulario/4-Insiemi_numerici.pdf
Cut The Knot	Divisibility criteria from cut-the-knot	www.cut-the-knot.org/blue/divisibility.shtml
IPRASE TRENTINO	IPRASE www.iprase.tn.it Collegandoti al sito dell'IPRASE di Trento potrai imparare e ripassare giocando.	I giochi d'interesse sono i seguenti. • Ape operaia (individua i fattori) • Sceriffo (fattorizzazione – ricerca numeri primi) • Antivirus (criteri di divisibilità e divisori) • Bolle di sapone (criteri di divisibilità e divisori) • Lunaporto (criteri di divisibilità e divisori)

Keywords

Matematica, Aritmetica, Divisibilità, Fattorizzazione, M.C.D., m.c.m., Massimo Comune Divisore, minimo comune multiplo, algoritmo di Euclide, esercizi con soluzioni
Math, Arithmetic, Divisibility, Highest Common Factor, HCF, Greatest Common Factor, GCF, Lowest Common Multiple, LCM, Least Common Multiple, LCM, Greatest common divisor, GDC, Euclidean Algorithm
Matemática, Aritmética, Máximo común divisor, M.C.D., Mínimo común múltiplo, m.c.m., algoritmo de Euclides.
Mathématique, Arithmétique, Divisibilité, factorisation, Plus grand commun diviseur, PGDC, Plus petit commun multiple, PPCM, Algorithme d'Euclide
Mathematik, Arithmetik, Größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches, Euklidischer Algorithmus