L'algoritmo di Euclide per la ricerca del MCD

The Euclidean algorithm for finding the greatest common divisor of two integers

La divisione di un numero intero a per un altro intero b può essere prolungata finché il resto è più piccolo del divisore.

Se $a = 648$ e $b = 7$, si ha un quoziente $q = 97$ e un resto $r = 4$.

```
648 : 7 = 92          648 = 7 · 92 + 4
 18
  4
```

TEOREMA

Nella divisione tra due numeri naturali $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{b}$ diverso da zero, si può sempre trovare una coppia di numeri $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{r}$, tali che $\boldsymbol{a = b \cdot q + r}$ con $\boldsymbol{r}$ compreso tra $\boldsymbol{b}$ e zero ($0 \leq r \leq b$)

Da questo si può dedurre un metodo per la ricerca del M.C.D. di due numeri interi (particolarmente utile per numeri grandi). L'algoritmo (*un algoritmo è un metodo sistematico di calcolo*) si basa sul fatto che ad ogni relazione della forma:

$$a = b \cdot q + r$$

segue che:

$$MCD(a,b) = MCD(b,r)$$

Ripetendo nello stesso modo accade che **il MCD è l'ultimo resto positivo della successione**.

$$\begin{aligned}
a &= b \cdot q_1 + r_1 \\
b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\
r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3 \\
r_2 &= r_3 \cdot q_4 + r_4 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
r_{n-3} &= r_{n-2} \cdot q_{n-1} + \boldsymbol{r_{n-1}} \ \textbf{-> MCD} \\
r_{n-2} &= r_{n-1} \cdot q_n + 0
\end{aligned}$$

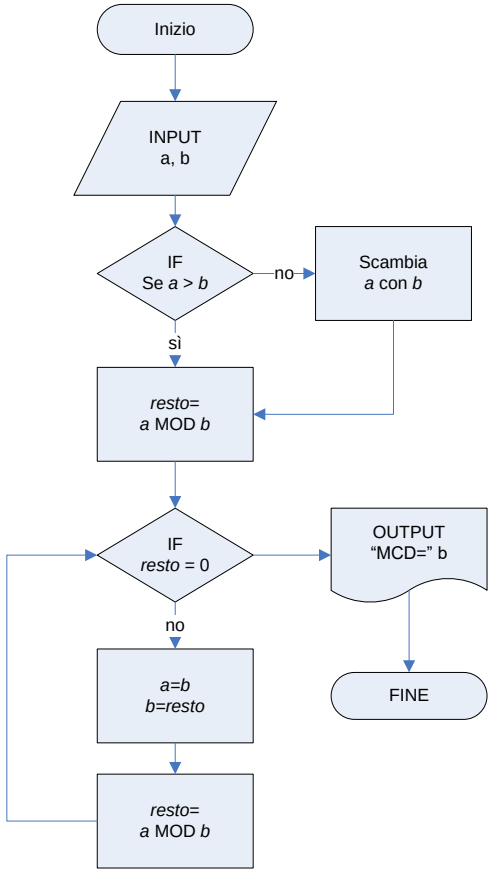
L'algoritmo è applicato alla risoluzione delle equazioni diofantee nella forma $ax + by = c$.

Il teorema di Lamé (1845) stabilisce il numero di passi richiesti per trovare il $M.C.D.(a,b)$ con il metodo di Euclide.
Per $n \geq 1$, siano dati due numeri interi u e v, con $u > v > 0$ tali che l'applicazione dell'algoritmo di Euclide applicato a u e v richiede esattamente n divisioni e tali che u sia piccolo tanto da soddisfare queste condizioni. Allora $u = F_{n+1}$ e $v = F_{n+1}$, dove F_k è un numero di Fibonacci.
Il numero di passaggi dell'algoritmo di Euclide non supera di 5 volte il numero delle cifre del numero con meno cifre. Il valore 5 può, inoltre, essere ulteriormente ridotto a $\ln 10 / \ln \emptyset \approx 4{,}785$, dove $\emptyset$ è il rapporto aureo.

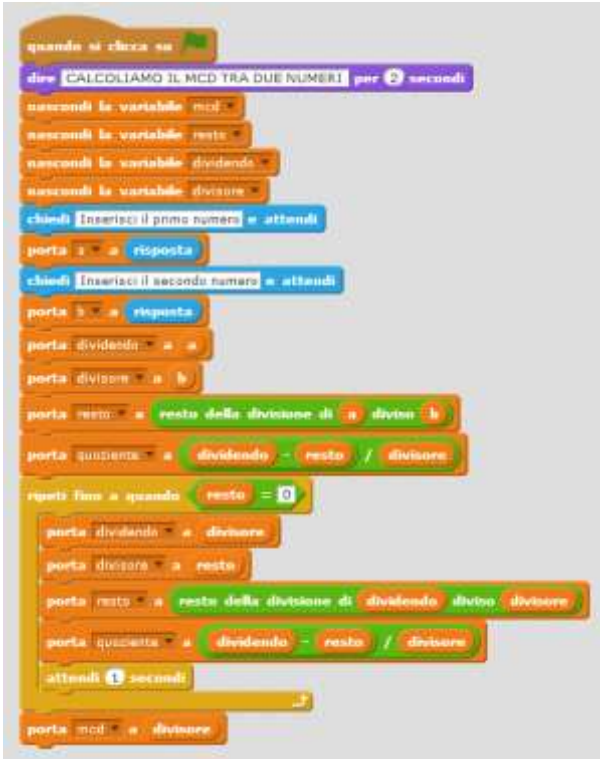
Gabriel Lamé (Tours, 22 luglio 1795 – Parigi, 1° maggio 1870) dimostrò nel 1844 che l'algoritmo di Euclide ha un ciclo più lungo se in input ci sono numeri di Fibonacci.

Algoritmo Euclideo per divisioni successive

L'algoritmo non richiede la fattorizzazione dei due interi.



Realizzazione in Scratch



Rappresentazione dell'algoritmo in pseudocodice e realizzazione in C++ e Python

*Prendi i valori da tastiera **a** e **b***
*Se **a** < **b** allora scambiali*
*Metti in **resto** il resto tra **a** e **b***

*Ripeti finché **resto<>0***
*Metti in **a** il contenuto di **b***
*Metti in **b** il contenuto di **resto***
*Metti in RESTO il resto tra **a** e **b***
Fine Ripeti

*Mostra il MCD che è pari a **b***

C++

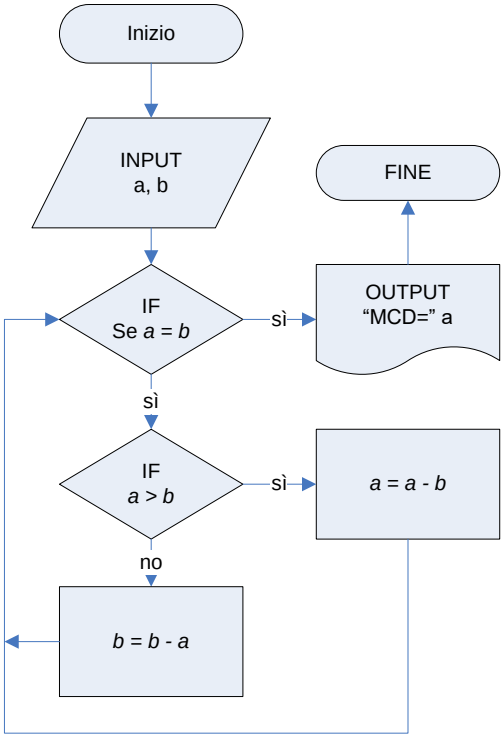
```
int gcd(int a, int b) {
  if (b == 0)
    return a;
  else
    return gcd(b, a % b);
}
```

Python

```
a=28
b=70
def euclide(a, b):
   while(b != 0):
      r=a%b
      a=b
      b=r
   return a
print(euclide(a,b))
```

Algoritmo Euclideo per differenze successive

L'algoritmo non richiede la fattorizzazione dei due interi.



Rappresentazione dell'algoritmo (pseudocodice)

Prendi i valori da tastiera ***a*** *e* ***b***
Ripeti finché ***a<>b***
    Se ***a > b***
        Sostituisci ad ***a*** *il valore* ***(a- b)***
    Altrimenti
        Sostituisci ad ***b*** *il valore* ***(b-a)***
    Fine se
Fine Ripeti
Mostra il MCD che è pari ad ***a (a=b)****!*

Esempi risolti

MCD (24, 14) = 2

$24 = 2^3 \cdot 3$
$14 = 2 \cdot 7$

Algoritmo Sottrazioni successive

24 – 14 = 10
14 – 10 = 4
10 – 4 = 6
6 – 4 = 2
4 - 2 = 2
2 - 2 = 0

quindi MCD(24, 14) = 2

MCD (24, 14) = 2 = **2**

ricorda che:
m.c.m. (24, 13) = $2^3 \cdot 3 \cdot 7$

Algoritmo Divisioni successive

24 : **14** = 1 resto **10**
14 : **10** = 1 resto **4**
10 : **4** = 2 resto **2**
4 : **2** = 2 **resto 0**

Quindi MCD(24, 14) = 2

MCD (1804, 328) = 164

$1804 = 2^2 \cdot 11 \cdot 41$
$328 = 2^3 \cdot 41$

Algoritmo Sottrazioni successive

1804 – 328 = 1476
1476 – 328 = 1148
1148 – 328 = 820
820 – 328 = 492
492– 328 = 164
328 – 164 = 164
164 = 164

quindi MCD (1804, 328) = 164

MCD (1804, 328) = $2^2 \cdot 41$ = **164**

ricorda che:
m.c.m. (1804, 328) = $2^3 \cdot 11 \cdot 41$

Algoritmo Divisioni successive

1804 : 328 = 5 resto **164**
328 : 164 = 2 **resto 0**

Quindi MCD (1804, 328) = **164**

MCD (61, 24) = 1

61 = 61 (numero primo!)
24 = $2^3 \cdot 3$

Algoritmo Sottrazioni successive

61 – 24 = 37
37 – 24 = 13
24 – 13 = 11
13 – 11 = 2
11 – 2 = 9
9 – 2 = 7
7 – 2 = 5
5 – 2 = 3
3 – 2 = 1
2 – 1 = 1
1 – 1 = 0 quindi MCD (61, 24) = 1

MCD(61, 24) = **1** (**primi tra loro**)

ricorda che:
m.c.m.(61, 24) = $2^3 \cdot 3 \cdot 61$

Algoritmo Divisioni successive

61 = **24** · 2 + **13**
24 = **13** · 1 + **11**
13 = **11** · 1 + **2**
11 = **2** ·5 + **1**
2 = **1** · 2 + **0**

61 : 24 = 2 resto 13
24 : 13 = 1 resto 11
13 : 11 = 1 resto 2
11 : 2 = 5 resto **1**
2: 1 = 2 **resto 0**

MCD (84, 36) = $2^2 \cdot 3 = 12$

840 = $2^2 \cdot 3 \cdot 7$
36 = $2^2 \cdot 3^2$

Algoritmo Sottrazioni successive

84 – 36 = 48
48 - 36 = 12
36 - 12 = 24
24 – 12 = 12
12 – 12 = 0 quindi MCD (84, 36) = 12

MCD (84, 36) = $2^2 \cdot 3 = 12$

ricorda che:
m.c.m.(84, 36) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

Algoritmo Divisioni successive

84 = **36** · 2 + **12**
36 = **12** · 3 + **0**

MCD (840, 611) = 1

$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$611 = 13 \cdot 47$

MCD (840, 611) = **1** (**primi tra loro**)

ricorda che:
m.c.m.(840, 611) $= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 47$

Algoritmo Sottrazioni successive

841 – 611 = 229
611 - 229 = 382
382 - 229 = 153
229 – 153 = 76
153 - 76 = 77
77 - 76 = 1
76 – 1 = 75
…
3 – 1 = 2
2 – 1 = 1
1 – 1 = 0 quindi MCD (840, 611) = 1

Algoritmo Divisioni successive

840 = **611** · 1 + **229**
611 = **229** · 2 + **153**
229 = **153** · 1 + **76**
153 = **76** · 2 + **1**
76 = **1** · 76 + **0**

MCD (648, 7) = 1
$648 = 2^3 \cdot 3^4$
7 = 7 (numero primo!)

MCD (648, 7) = **1** (**primi tra loro**)
ricorda che:
m.c.m.(648, 7) $= 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$

Algoritmo Sottrazioni successive

841 – 7 = 834
834 – 7 = 827
…
22 – 7 = 15
15 – 7 = 8
8 – 7 = 1
7 – 1 = 6
6 – 1 = 5
5 – 1 = 4
4 – 1 = 3
3 – 1 = 2
2 – 1 = 1
1 – 1 = 0 quindi MCD (648, 7) = 1

Algoritmo Divisioni successive

648 = **7** · 92 + **4**
7 = **4** · 1 + **3**
4 = **3** · 1 + **1**
3 = **1** · 5 + **0**

Matematica e storia

Euclide*, *matematico greco *nato ad Alessandria d'Egitto e fiorito intorno al* ***300 a.C.****, è famoso per la sua opera "****Elementi****" (in greco Stoichêia) dove tratta tra l'altro questo procedimento in modo geometrico. Ricordiamo, legati al suo nome, il termine* ***geometria euclidea*** *o elementare (comprendente la geometria piana e la geometria solida e contrapposta a quelle non euclidee), il* ***postulato di Euclide*** *(libro I, aitémata quinto) ed i due importanti* ***teoremi di Euclide*** *(libro I, assieme al teorema di Pitagora).*

L'algoritmo di Euclide è proposto come soluzione alla Proposizione VII.2 degli Elementi
Euclid's algorithm appears as the solution to the Proposition VII.2 in the Element's
aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html
it.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_di_Euclide
it.wikipedia.org/wiki/Euclide

Matematica e storia

Gabrile Lamé *(Tours 22.7.1795 – Paris, 1.5.1870) è stato matematico e fisico francese.*

Il teorema di Lamé (1845 G. Lamé) stabilisce il numero di passi richiesti per trovare il MCD(a,b) con il metodo di Euclide.

it.wikipedia.org/wiki/Gabriel_Lam%C3%A9

Approfondimenti

	MCD e algoritmo di Euclide progettomatematica.dm.unibo.it	www.dm.unibo.it/matematica/Congruenze/html/pag2/pag2.htm
	Algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD (programmi in javascript). Serie di Fibonacci.	utenti.quipo.it/base5/numeri/euclidalgor.htm utenti.quipo.it/base5/numeri/fibonacciserie.htm
	Altro approccio all'algoritmo di Euclide	www.di.uniba.it/~proga/mcd.pdf
	Algoritmo di Euclide	it.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_di_Euclide it.wikipedia.org/wiki/Massimo_comun_divisore it.wikipedia.org/wiki/Euclide
	Number Theory - Math Goodies	www.mathgoodies.com
	Insiemi numerici	www.matematicamente.it/staticfiles/formulario/4-Insiemi_numerici.pdf
	Euclid's Algorithm from cut-the-knot	www.cut-the-knot.org/blue/Euclid.shtml www.cut-the-knot.org/blue/EuclidAlg.shtml
	The Prime Pages *Professor Chris Caldwell* University of Tennessee at Martin	primes.utm.edu
	"Euclide megarense acutissimo philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice. Diligentemente rassettato, et alla integrita ridotto, per il degno professore di tal scientie Nicolo Tartalea brisciano. Secondo le due tradottioni. Con vna ampla espositione dello istesso tradottore di nuouo aggiunta", di Euclides; traduzione di Niccolò Tartaglia; a cura di Niccolò Tartaglia; IN VENETIA. Appresso Curtio Troiano 1565	www.liberliber.it/biblioteca/e/euclides/ Gli Elementi di Euclide - Opera completa e prima traduzione italiana a cura di Niccolò Tartagli.
	Euclid's Element	aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html

Keywords

Matematica, Aritmetica, Divisibilità, MCD, mcm, Massimo Comune Divisore, minimo comune multiplo, algoritmo di Euclide, esercizi con soluzioni

Math, Arithmetic, Divisibility, Highest Common Factor, HCF, Greatest Common Factor, GCF, Lowest Common Multiple, LCM, Least Common Multiple, LCM, Greatest common divisor, GDC, Euclidean Algorithm

Matemática, Aritmética, Máximo común divisor, mcd, m.c.d., Mínimo común múltiplo, mcm, m.c.m., algoritmo de Euclides.

Mathématique, Arithmétique, Divisibilité, factorisation, Plus grand commun diviseur, PGDC, Plus petit commun multiple, PPCM, Algorithme d'Euclide

Mathematik, Arithmetik, Größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches, Euklidischer Algorithmus