

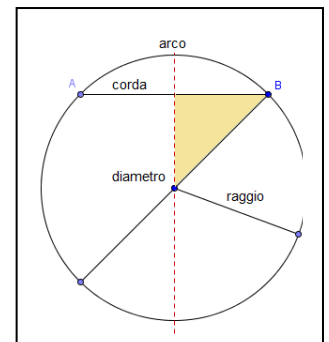
# Circonferenza e cerchio

## DEFINIZIONE

La **circonferenza** è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un unico punto detto **centro**.<sup>1</sup>

## DEFINIZIONE

Il **cerchio** è l'insieme costituito dai punti appartenenti alla circonferenza e interni a questa.



## DEFINIZIONE

Si chiama **raggio** il segmento che ha per estremi il centro della circonferenza e uno dei punti appartenenti alla circonferenza.

Due circonferenze con raggi congruenti sono congruenti.

## DEFINIZIONE

Ogni segmento avente come estremi due punti qualsiasi della circonferenza è detto **corda**.

In ogni circonferenza il **diametro** è la corda massima, corda che passa per il centro della circonferenza ed è pari al doppio della misura del raggio ( $d = 2r$ ).

Per due punti passano infinite circonferenze.

## TEOREMA

**Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.**

Dati tre punti A, B e C non allineati si procede nel modo seguente per il disegno della circonferenza che passa per tutti e tre i punti.

Si traccia il segmento AB e l'asse relativo.

Si traccia il segmento BC e l'asse relativo.

Si individua il punto O di intersezione dei due assi.

Puntando il compasso in O con apertura OA si traccia la circonferenza.

I punti A, B e C appartengono alla circonferenza tracciata.

<sup>1</sup> Un luogo geometrico è l'insieme di tutti i punti e dei soli punti del piano che condividono una data proprietà o caratteristica del luogo.

### I teoremi sulle corde

In ogni circonferenza il **diametro** è la corda massima, corda che passa per il centro della circonferenza ed è pari al doppio della misura del raggio ( $d = 2r$ ).

#### TEOREMA

**In una circonferenza, ogni diametro è maggiore di qualunque altra corda che non passa per il centro.**

La distanza di una corda dal centro di una circonferenza è un segmento perpendicolare alla corda e la divide in due parti congruenti formando, con i due raggi che uniscono il centro agli estremi della corda e tale distanza, due triangoli rettangoli.

#### TEOREMA

**Due corde sono congruenti se e solo se hanno la stessa distanza dal centro.**

In una circonferenza se un diametro è perpendicolare a una corda, la corda, l'angolo al centro e l'angolo alla circonferenza corrispondenti sono divisi in parti congruenti da tale diametro.

#### TEOREMA

**Una retta passante per il centro della circonferenza e perpendicolare a una corda (asse della corda) la divide in due parti congruenti.**

#### TEOREMA

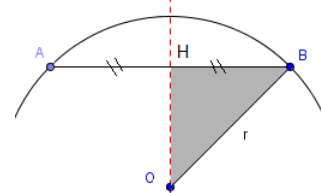
**Una retta passante per il centro della circonferenza che divide in due parti congruenti una corda è perpendicolare a questa.**

La distanza di una corda dal centro di una circonferenza è un segmento perpendicolare alla corda e la divide in due parti congruenti formando, con i due raggi che uniscono il centro agli estremi della corda e tale distanza, due triangoli rettangoli.

Per i due triangoli vale in teorema di Pitagora.

$$(distanza\ corda\ dal\ centro)^2 + \left(\frac{corda}{2}\right)^2 = raggio^2$$

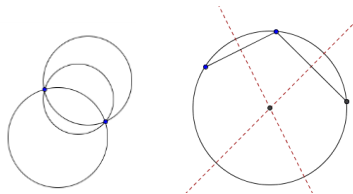
$$r = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + OH^2}$$



Dati tre punti  $ABC$ , si disegnino i segmenti  $AB$  e  $BD$ ; si disegni l'asse di ognuno di questi segmenti con riga e compasso; il punto d'intersezione degli assi così costruiti è il centro della circonferenza che passa per  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Si noti come l'asse di una corda passi per il centro della circonferenza.

Per tre punti allineati, essendo gli assi dei segmenti tra loro paralleli, non passa alcuna circonferenza.



#### DEFINIZIONE

Una parte delle due parti della circonferenza individuata da due punti a essa appartenenti è detta **arco** di circonferenza.

Due punti appartenenti a una circonferenza individuano su di questa due archi.

Due punti diametralmente opposti individuano due archi congruenti, detti **semicirconferenza**.

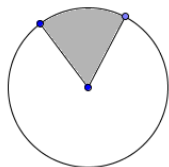
Dati due punti appartenenti a una circonferenza si dice che la corda così individuata **sottende** l'arco e che l'arco è **sotteso** alla corda.

#### TEOREMA

*In una circonferenza corde congruenti sottendono archi congruenti.*

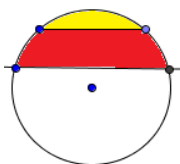
#### DEFINIZIONE

Un **settore circolare** è la parte di cerchio delimitata da due raggi e l'ampiezza del settore è data dall'angolo al centro compreso tra i due raggi.



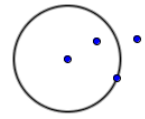
Un **segmento circolare a una base** è la parte di cerchio delimitata da una corda e dall'arco che la sottende.

Un **segmento circolare a due basi** è la parte di cerchio delimitata da due corde tra loro parallele.



## Posizione di un punto rispetto a una circonferenza

Un punto può essere **esterno**, **interno** o **appartenere** a una circonferenza secondo la distanza ( $d$ ) di questo dal centro della circonferenza.



## Posizione di una retta rispetto a una circonferenza

Una retta è **esterna** a una circonferenza se la distanza ( $d$ ) di questa dal centro della circonferenza è maggiore del raggio ( $r$ ).

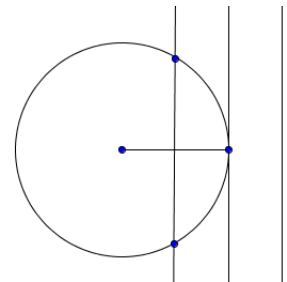
$$d > r$$

Una retta è **secante** a una circonferenza se la distanza di questa dal centro della circonferenza è minore del raggio.

$$d < r$$

Una retta è **tangente** a una circonferenza se la distanza di questa dal centro della circonferenza è uguale al raggio.

$$d = r$$



## Posizioni reciproche di due circonferenze

Una circonferenza è **esterna** a un'altra circonferenza se non hanno alcun punto in comune.

$$OO' = d > r_1 + r_2$$

Una circonferenza è **interna** a un'altra circonferenza se non hanno alcun punto in comune e tutti i punti di uno dei cerchi appartiene anche all'altro.

$$OO' = d < r_2 - r_1$$

Una circonferenza è **secante** a un'altra circonferenza se hanno due punti in comune.

$$OO' = d < r_1 + r_2$$

Una circonferenza è **tangente esternamente** a un'altra circonferenza se ha uno e uno solo punto in comune e se questo è vero anche per i due cerchi.

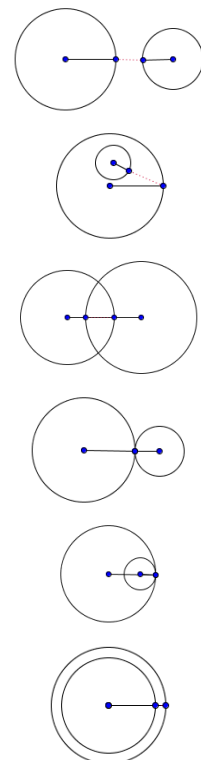
$$OO' = d = r_1 + r_2$$

Una circonferenza è **tangente internamente** a un'altra circonferenza se ha uno e uno solo punto in comune e se tutti i punti di uno dei cerchi appartiene anche all'altro.

$$OO' = d = r_1 - r_2$$

Due circonferenze, una interna all'altra, si dicono **concentriche** se hanno lo stesso centro.

$$O = O'$$



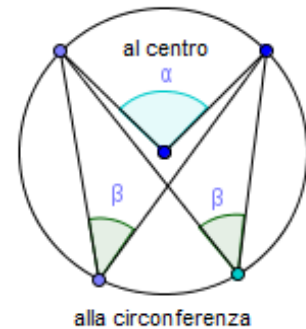
## Angoli al centro e angoli alla circonferenza

Un **angolo al centro** ha il vertice nel centro della circonferenza e i lati che la intersecano.

A ogni angolo al centro corrisponde uno e un solo arco.

Un angolo al centro piatto insiste su una semicirconferenza.

Un angolo al centro retto insiste su un quarto di circonferenza.



Un **angolo alla circonferenza** ha il vertice sulla circonferenza e i lati che la intersecano.

A ogni angolo alla circonferenza corrisponde uno e un solo arco.

Un angolo al centro e un angolo alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono detti **corrispondenti**.

### Teorema dell'angolo al centro e dell'angolo alla circonferenza

**In ogni circonferenza l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.**

Un angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro corrispondente.

Dal teorema dell'angolo al centro e dell'angolo alla circonferenza seguono due importanti corollari.

**Corollario 1**

*Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti.*

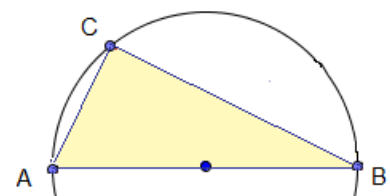
**Corollario 2**

*Ogni angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è retto.*

### Teorema di Dante 2

**Ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo.**

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

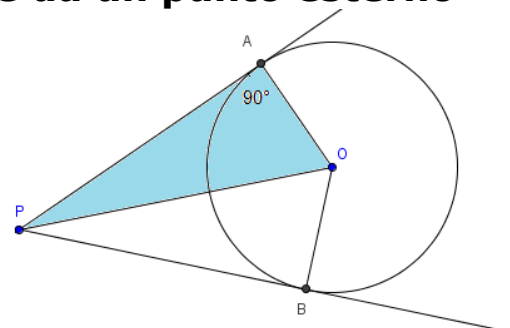


## Tangenti alla circonferenza condotte da un punto esterno

Per un punto esterno si possono condurre due tangenti a una circonferenza e i due segmenti di tangente sono tra di loro congruenti ( $PA \cong PB$ ).

Essendo i segmenti di tangente  $AP$  e  $BP$  perpendicolari ai raggi  $OA$  e  $OB$  ( $PA \perp OA$  e  $PB \perp OB$ ),  $PA \cong PB$  e si evidenziano due triangoli rettangoli congruenti ( $OPA$  e  $OPB$ ).

$$PO^2 = AP^2 + OA^2$$



<sup>2</sup> Dante Alighieri - Divina Commedia - Canto 13 del Paradiso (versi 101-102),  
 101 o se del mezzo cerchio far si puote  
 102 triangol si ch'un retto non avesse.

## Lunghezza della circonferenza

In una qualsiasi circonferenza è costante il rapporto tra la misura della circonferenza e la misura del diametro. Tale rapporto è pari al **numero irrazionale trascendente pi greco** ( $\pi^3$ ).

Pi greco in pratica si considera a livello scolastico pari a 3,14<sup>4</sup>.

Il Pi Day cade, infatti, il 14 marzo di ogni anno ([www.piday.org](http://www.piday.org))

La lunghezza della circonferenza è data dal prodotto del diametro per il numero  $\pi$ .

$$\frac{C}{d} = \frac{C}{2r} = \pi \quad \rightarrow \quad \boxed{C = 2\pi r} \quad C = d\pi \quad r = \frac{C}{2\pi}$$

## Arco di circonferenza

Una parte delle due parti della circonferenza individuata da due punti a essa appartenenti è detta **arco** di circonferenza.

Due punti appartenenti a una circonferenza individuano su di questa due archi.

## Lunghezza di un arco di circonferenza

La lunghezza degli archi alla circonferenza e l'ampiezza degli angoli al centro corrispondenti sono legati da una relazione di proporzionalità diretta.

$$l:C = \alpha:360 \quad l:2\pi r = \alpha:360 \quad \boxed{l = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360}} \quad \alpha = \frac{l \cdot 360}{2\pi r} \quad \alpha = \frac{l \cdot 360}{2\pi r}$$

Dove  $l$  è la lunghezza dell'arco,  $C$  la lunghezza della circonferenza e  $\alpha$  è l'angolo al centro.

<sup>3</sup> Pi greco day: il 14 marzo (3-14) di ogni anno.

<sup>4</sup> « Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages! Immortel Archimède sublime ingénieur... »  
(per ricordare 3,14159265358979)

## Area del cerchio

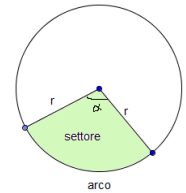
L'area del cerchio è data dal prodotto di  $\pi$  per il quadrato della misura del raggio.

$$A = \pi r^2$$

$$\pi r^2 = A \rightarrow \frac{\pi r^2}{\pi} = \frac{A}{\pi} \rightarrow r^2 = \frac{A}{\pi} \rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

## Settore circolare

La parte di piano compresa tra due raggi e l'arco alla circonferenza corrispondente all'angolo al centro è detta **settore** circolare.



### Area di un settore circolare

L'area di un settore circolare e l'ampiezza degli angoli al centro corrispondenti sono legati da una relazione di proporzionalità diretta. Si opera con la riduzione all'unità (il grado) o con una proporzione.

$$S_{\text{settore}} : S_{\text{cerchio}} = \alpha : 360 \quad S_{\text{settore}} : \pi r^2 = \alpha : 360 \quad S_{\text{settore}} = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360} \quad \alpha = \frac{S_{\text{settore}} \cdot 360}{\pi r^2}$$

Dove  $S_{\text{settore}}$  è l'area del settore circolare,  $S_{\text{cerchio}}$  l'area del cerchio e  $\alpha$  è l'angolo al centro.

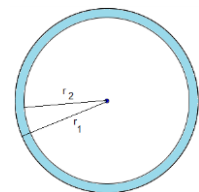
Conoscendo, invece, l'arco e il raggio relativi a un settore si procede nel modo seguente.

$$A_{\text{settore}} : A_{\text{cerchio}} = l_{\text{arco}} : C$$

$$A_{\text{settore}} : \pi r^2 = l_{\text{arco}} : 2\pi r \quad A_{\text{settore}} = \frac{l_{\text{arco}} \cdot \pi r^2}{2\pi r} = \frac{l_{\text{arco}} \cdot r}{2}$$

## Corona circolare

La parte di piano compresa tra due circonferenze concentriche è detta **corona** circolare.



### Area di una corona circolare

L'area di una corona circolare è data dalla differenza tra l'area del cerchio maggiore e quella del cerchio minore.

$$S_c = \pi(r_1^2 - r_2^2)$$

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 - \frac{S_c}{\pi}}$$

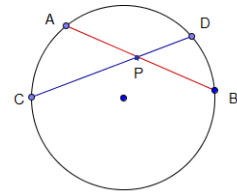
$$r_1 = \sqrt{r_2^2 + \frac{S_c}{\pi}}$$

## Teorema delle corde

Due corde che si intersecano in un punto formano quattro segmenti che sono i termini di una proporzione: i segmenti dell'una sono i medi, gli altri gli estremi di una proporzione.

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$PA:PD = PC:PB$$

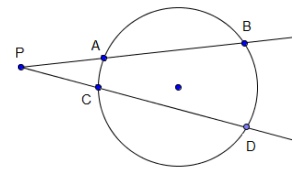


## Teorema delle secanti

Se da un punto P, interno o esterno alla circonferenza, si tracciano due secanti si ottengono quattro segmenti che sono i termini di una proporzione: i segmenti dell'una sono i medi, gli altri gli estremi di una proporzione.

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$PA:PC = PD:PB$$

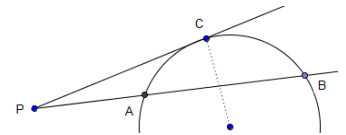


## Teorema della tangente e della secante

Se da un punto P, esterno alla circonferenza, si tracciano una secante e una tangente si ottengono tre segmenti tali che il segmento di tangente è medio proporzionale tra gli altri due individuati dalla secante.

$$PC \cdot PC = PA \cdot PB$$

$$PA:PC = PC:PB$$

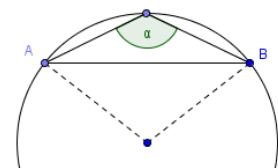


## Teorema dei seni

La misura di una corda di una circonferenza è uguale al prodotto della misura del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza che insistono su uno degli archi sottesi alla corda.

$$AB = 2r \sin \alpha$$

Dove  $\alpha$  è uno qualsiasi degli angoli alla circonferenza inscritti nell'arco maggiore AB.





## Parole che fanno un numero

---

Se è facile ricordare “tre virgola quattordici”, non è facile procedere oltre per diverse cifre di pi greco. Sono state trovate diverse soluzioni e frasi utili per questo.

*Ave o Roma o Madre gagliarda di latine virtù che tanto luminoso splendore prodiga spargesti con la tua saggezza.*

$\pi = 3.141592653589793238.$

Ognuna delle parole rappresenta come numero di lettere una delle cifre di pi greco.

*Esempio: Ave = 3, o = 1, Roma = 4, o = 1, Madre = 5, e così via.*

*Che n'ebbe d'utile Archimede da ustori vetri sua somma scoperta?*

$\pi = 3.14159265358.$

*Que j'aime a faire apprendre  
Un nombre utile aux sages!  
Glorieux Archimede, artiste ingenieux,  
Toi, de qui Syracuse loue encore le merite!*

*How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy chapters involving quantum mechanics.  
One is, yes, adequate even enough to induce some fun and pleasure for an instant, miserably brief.*

## Citazioni

---





Papiro Rhind (1650 A.C.)

“Togli  $\frac{1}{9}$  ad un diametro e costruisci un quadrato sulla parte che rimane, questo quadrato ha la stessa area del cerchio”

La Bibbia (VI sec. A.C.)

“Poi fece il mare fuso: dieci cubiti da una sponda all'altra cioè completamente rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e una corda di trenta cubiti lo circondava all'intorno.”

# Approfondimenti

 <b>WIKIPEDIA</b> L'enciclopedia libera	Cerchio e circonferenza	<a href="https://it.wikipedia.org/wiki/Cerchio">it.wikipedia.org/wiki/Cerchio</a> <a href="https://it.wikipedia.org/wiki/Circonferenza">it.wikipedia.org/wiki/Circonferenza</a>
	Pi greco	<a href="https://it.wikipedia.org/wiki/Pi_greco">it.wikipedia.org/wiki/Pi_greco</a> <a href="https://oeis.org/A000796">oeis.org/A000796</a>
	Quadratura del cerchio	<a href="https://it.wikipedia.org/wiki/Quadratura_del_cerchio">it.wikipedia.org/wiki/Quadratura_del_cerchio</a>
	Pi day	<a href="http://www.piday.org">www.piday.org</a>
	Imparare le cifre di pi greco <i>Base cinque</i> <i>Appunti di Matematica ricreativa</i> <a href="http://utenti.quipo.it/base5">utenti.quipo.it/base5</a>	<a href="http://utenti.quipo.it/base5/numeri/pigreco.htm">utenti.quipo.it/base5/numeri/pigreco.htm</a>
	Esercizi per la secondaria di primo grado, istituti professionali e di ripasso per quella di secondo grado sul sito UbiMath. Tutti risolti e commentati.	<a href="http://www.ubimath.org">www.ubimath.org</a>