Triangoli

Un **triangolo** è un poligono formato da tre lati. Rappresenta la più semplice figura piana formata dal minimo numero di lati utili a chiudere una superficie piana.

> Teorema
> *In ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.*

Dati tre segmenti qualsiasi (a, b, c) è possibile costruire un triangolo solo se la lunghezza di ciascuno è minore della somma degli altri due.

Si ottiene un triangolo, quindi, se e solamente se le tre seguenti condizioni sono tutte soddisfatte.

$a < b + c \;\; AND \; b < a + c \;\; AND \;\; c < a + b$

Il triangolo è una figura indeformabile ed è l'unico poligono cui è sempre circoscrivibile e in cui è sempre inscrivibile una circonferenza.

> Teorema
> *In ogni triangolo ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti.*

La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto (180°).

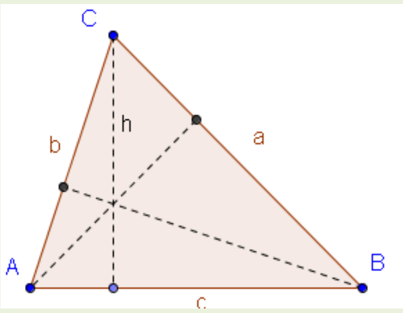
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

La somma degli angoli esterni di un triangolo è sempre un angolo giro (360°).

Almeno due angoli interni sono acuti (non è possibile che un triangolo abbia più di un angolo interno retto o ottuso).

Un angolo retto può essere presente soltanto in un triangolo isoscele o in un triangolo scaleno, ma mai in un triangolo equilatero.

Ciascun angolo esterno è in un triangolo uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti.



	$2p = a + b + c$
	$A = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{b \cdot h}{2}$
	$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ dove $p = \frac{2p}{2} = \frac{a+b+c}{2} \quad (semiperimetro)$

Un **triangolo degenere** è un triangolo che presenta un angolo di 180°, ovvero quando un lato misura quanto la somma degli altri due e degenera in un segmento.

Date tre misure costruire un triangolo.

Dati tre segmenti, che soddisfino la regola di costruibilità dei triangoli, è possibile costruire solo un tipo di triangolo.

Si disegna un segmento AB di lunghezza pari alla prima misura nota.

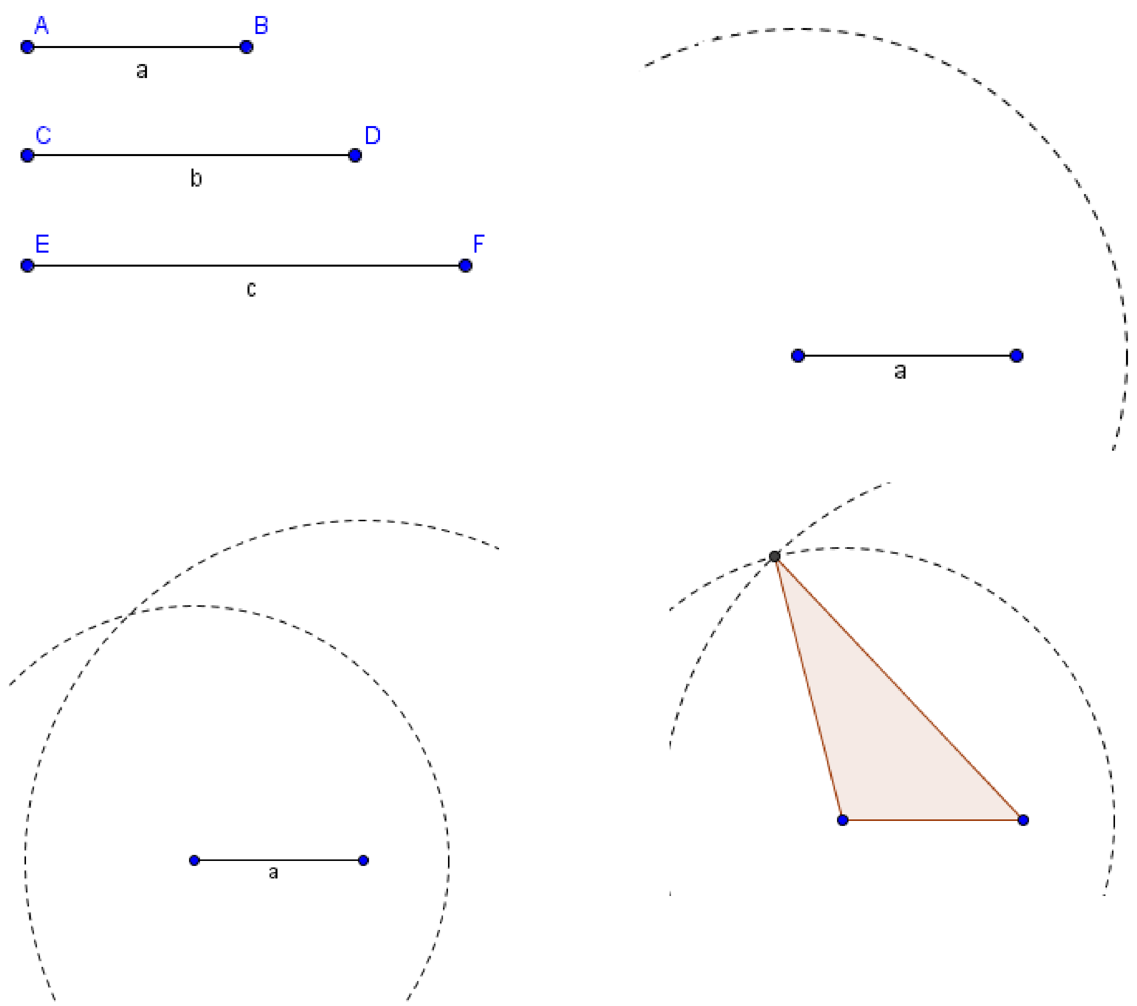
Si impone al compasso un’apertura pari alla seconda misura data.

Si traccia una circonferenza, con apertura pari a quella della seconda misura nota, con centro in uno dei vertici del segmento disegnato.

S’impone al compasso un’apertura pari alla terza misura.

Si traccia una circonferenza, con apertura pari a quella della terza misura nota, con centro nell’altro vertice del segmento disegnato e in modo che tale circonferenza intersechi la prima (punto C).

Si uniscono i vertici del segmento disegnato con tale intersezione. Si ottiene in questo modo il triangolo.

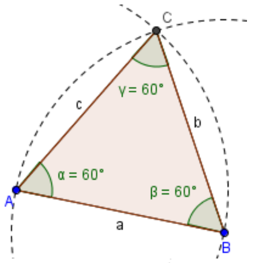


Classificazione dei triangoli

Classificazione in base ai lati

In un **triangolo equilatero** tutti i lati hanno lunghezza uguale.

Un triangolo equilatero è anche equiangolo (gli angoli interni sono tutti pari a 60°).

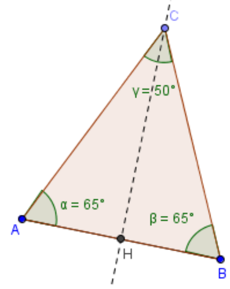


In un **triangolo isoscele** due lati hanno lunghezza uguale.

Un triangolo isoscele ha due angoli interni uguali (angoli detti adiacenti alla base; l'altro angolo è detto angolo al vertice).

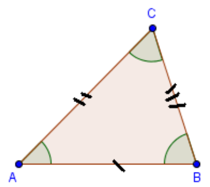
Teorema

Condizione necessaria e sufficiente perché un triangolo sia isoscele è che abbia due angoli congruenti.



In un **triangolo scaleno** tutti i lati hanno lunghezze differenti.

Gli angoli interni di un triangolo scaleno sono tutti differenti.

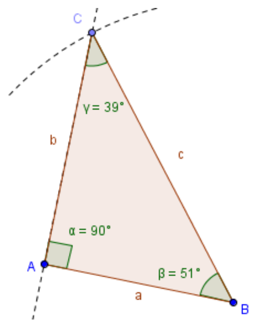


Classificazione in base ai lati

Un **triangolo rettangolo** ha un angolo interno di 90° (angolo retto). Il lato opposto all'angolo retto è detto ipotenusa ed è il lato più lungo del triangolo rettangolo. Gli altri due lati del triangolo sono detti cateti.

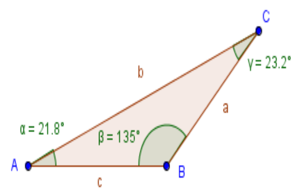
Per questo triangolo valgono il teorema di Pitagora e i teoremi di Euclide.

In un triangolo rettangolo il circocentro (assi) cade a metà ipotenusa.
In un triangolo rettangolo l'ortocentro (altezze) cade nel vertice dell'angolo retto.



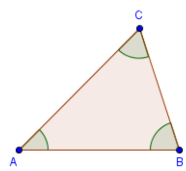
Un **triangolo ottusangolo** ha un angolo interno maggiore di 90° (angolo ottuso).

In un triangolo ottusangolo, l'ortocentro (altezze) si trova al di fuori del triangolo stesso.
Sono interni l'incentro, il baricentro e il circocentro.



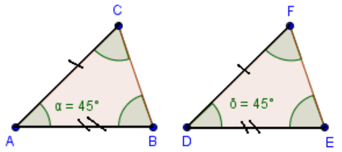
Un **triangolo acutangolo** ha tutti gli angoli interni minori di 90° (angoli acuti).

Incentro, baricentro e circocentro sono tutti e tre sempre interni a qualsiasi triangolo acutangolo.



Criteri di congruenza

Due triangoli sono congruenti se soddisfano almeno uno dei **criteri di congruenza**.

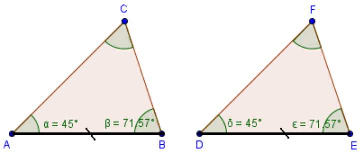


$\alpha \cong \delta$

$AB \cong DE$ e $AC \cong DF$

Primo criterio LAL

Due triangoli sono congruenti se hanno due lati e l'angolo fra essi compreso ordinatamente congruenti.



$\alpha \cong \delta$ e $\beta \cong \varepsilon$

$AB \cong DE$

Secondo criterio ALA

Due triangoli sono congruenti se hanno un lato e i due angoli a esso adiacenti ordinatamente congruenti (generalizzabile in due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente un lato e due angoli qualsiasi congruenti).

$AB \cong DE$

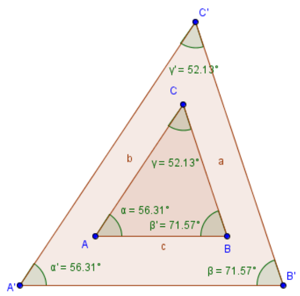
$BC \cong EF$

$AC \cong DF$

Terzo criterio LLL

Due triangoli sono congruenti se hanno tutti i lati ordinatamente congruenti.

Due triangoli si dicono simili se soddisfano almeno uno dei **criteri di similitudine**.



$\alpha \cong$

$\beta \cong \gamma$

Primo criterio AAA

Due triangoli sono simili se e solo se hanno ordinatamente tre angoli congruenti.

- Due triangoli equilateri sono sempre simili.
- Due triangoli rettangoli, con un angolo acuto congruente, sono simili.
- Due triangoli isosceli, con gli angoli al vertice congruenti, sono simili.
- Questo risultato non vale per gli altri poligoni (rettangoli con lati diversi).

$\alpha = \alpha'$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Secondo criterio

Due triangoli sono simili se hanno un angolo congruente e i lati che lo comprendono in proporzione.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Terzo criterio

Due triangoli sono simili se hanno i lati in proporzione.

Triangolo rettangolo

Il triangolo rettangolo è un triangolo molto particolare e studiato, se ne conoscono diverse proprietà e vi si applicano diversi teoremi.

Angoli del triangolo rettangolo

Un'applicazione della regola della somma degli angoli interni di un triangolo rettangolo che ha, quindi, un angolo retto è la seguente proprietà.

Se un triangolo ABC è rettangolo in A, allora gli angoli in B e in C sono complementari (somma 90°).

Se un triangolo, quindi, ha due angoli complementari, allora è rettangolo.

Costruzione di un triangolo rettangolo

È possibile costruire un triangolo rettangolo conoscendo solo due delle sue dimensioni. Vi è, quindi, una relazione che lega tra di loro i lati di questo tipo di triangolo (teorema di Pitagora).

Conoscendo i due cateti

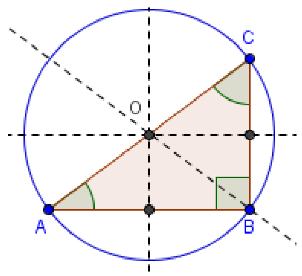
Si tracciano due segmenti perpendicolari delle dimensioni note. Il terzo lato, l'ipotenusa, si ottiene senza che occorra conoscerne la sua lunghezza.

Conoscendo un cateto e l'ipotenusa

Si traccia un segmento pari alla lunghezza del cateto noto. Si traccia la perpendicolare a tale segmento passante per un suo estremo. Si traccia un arco di cerchio di ragione pari alla lunghezza dell'ipotenusa. Il terzo lato, l'altro cateto, si ottiene senza che occorra conoscerne la lunghezza.

Cerchio circoscritto a un triangolo rettangolo

Per tutti i triangoli esiste un cerchio che passa per i suoi vertici. Si dice che il cerchio è circoscritto al triangolo o che il triangolo è inscritto nel cerchio. Il centro di tale cerchio è il punto d'incontro delle mediane del triangolo.



Se un triangolo è rettangolo, allora il centro del cerchio circoscritto cade nel punto medio dell'ipotenusa.

Ne consegue che…

Se un triangolo è rettangolo, allora la lunghezza della mediana relativa all'ipotenusa è pari alla metà della lunghezza dell'ipotenusa.

Proprietà delle mediane

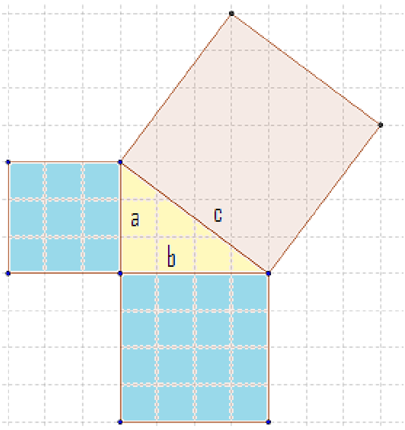
Teorema di Pitagora

Il triangolo rettangolo è un triangolo molto particolare e studiato, se ne conoscono diverse proprietà e vi si applicano diversi teoremi.

Il teorema di Pitagora stabilisce la relazione fondamentale tra i lati di un triangolo rettangolo ed è una versione limitata a essi del teorema di Carnot.

Enunciato teorema

In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è pari alla somma dell'area dei quadrati costruiti sui cateti.



Dato un triangolo rettangolo di lati a, b *e* c, *e indicando con* c *la sua ipotenusa e con* a *e* b *i suoi cateti, il teorema è espresso dall'equazione:*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Da cui risolvendo per l'ipotenusa c si ha:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Da cui si ricavano i rispettivi cateti a e b:

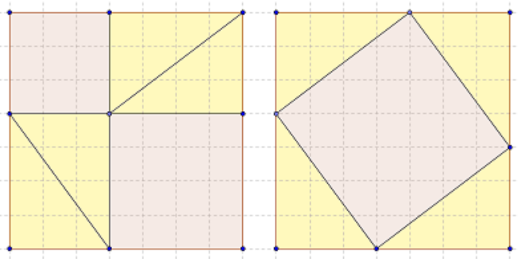
$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

DIMOSTRAZIONE

Sia dato un triangolo rettangolo qualsiasi, non necessariamente una terna pitagorica di numeri interi. Indichiamo con c la sua ipotenusa e con a e b i suoi cateti.

Si costruiscano due distinti quadrati che abbiano per lato la somma dei cateti ($l = a + b$). Si costruiscano all'interno di ogni quadrato quattro triangoli congruenti ai precedenti in modo da ottenere il quadrato costruito sull'ipotenusa in un caso e i quadrati costruiti sui cateti nell'altro. I triangoli hanno per costruzione i cateti congruenti e l'angolo compreso congruente e retto e sono per il primo criterio di congruenza (LAL) congruenti.

Per differenza di parti congruenti si ha che l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.



Dimostrazione

Esistono diverse altre dimostrazioni del teorema di Pitagora. La presente è didatticamente efficace e si presta ad un lavoro pratico di taglia incolla o pesatura.

Inversamente, ogni triangolo in cui i tre lati verificano questa proprietà è rettangolo.

La leggenda racconta che Pitagora, mentre attendeva di essere ricevuto Policrate a Samo, osservò le piastrelle quadrate del pavimento e una di questa rotta secondo la diagonale. Osservando i due triangoli rettangoli e, in questo caso particolare, usando sempre le diagonale vide l'equivalenza tra i quadrati costruiti sui lati.

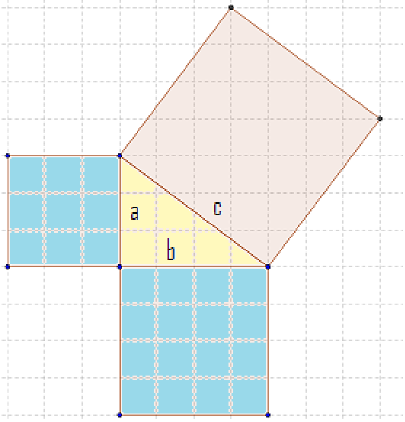
Esempi di utilizzo di questa proprietà dei triangoli rettangoli

Noti i due cateti, ricercare l'ipotenusa

Sia dato un triangolo ABC rettangolo in A tale che AB ***sia*** *4 cm e AC sia 3 cm.*

La relazione di Pitagora consente di trovare il valore dell'ipotenusa.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \qquad da\ cui \quad BC = \sqrt{25} = 5\ cm$

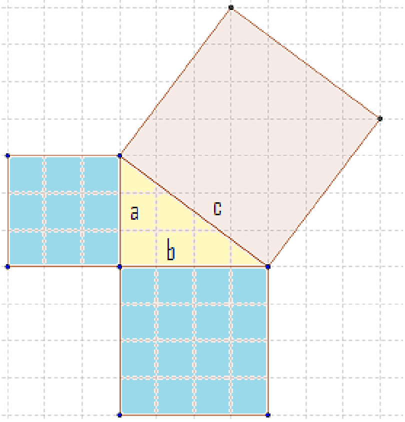


Noti l'ipotenusa e un cateto, ricercare l'altro cateto

Sia dato un triangolo ABC rettangolo in A tale che AB sia 4 cm e BC sia 5 cm.

La relazione di Pitagora consente di trovare il valore dell'ipotenusa.

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \qquad da\ cui \quad AC = \sqrt{16} = 4\ cm$



Approfondimenti

Collezione di ottantotto diversi approcci per provare il teorema di Pitagora.

www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

Triangoli rettangoli con angoli acuti particolari

La soluzione di triangoli rettangoli particolari è possibile conoscendo solo uno dei suoi lati.

Triangoli rettangoli con angoli acuti di 45°

Un triangolo rettangolo con due angoli acuti di 45° ha i cateti congruenti ed è, quindi, isoscele.

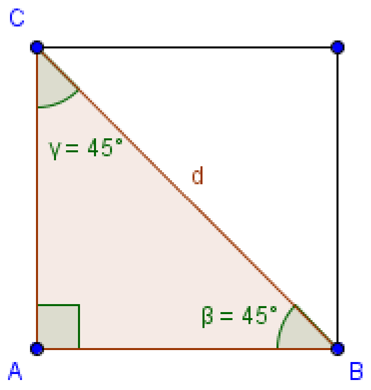
L'ipotenusa è in questo caso la diagonale di un quadrato avente per lato no dei cateti del triangolo rettangolo.

Applicando il teorema di Pitagora si ha:

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{l^2} = l\sqrt{2}$$

$$d = l\sqrt{2}$$

$$l = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

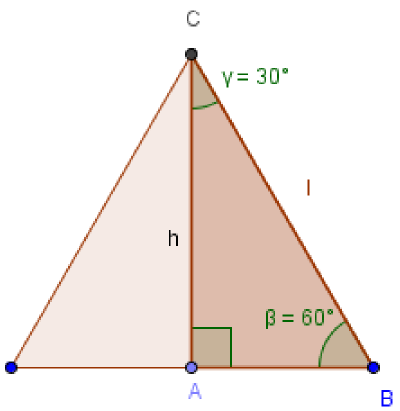


Triangoli rettangoli con angoli acuti di 30° e 60°

Un triangolo rettangolo con un angolo acuto di 30° e l'altro di 60° (180°-90°-30°) è la metà di un triangolo equilatero che ha per lato l'ipotenusa del triangolo rettangolo.

L'ipotenusa è in questo caso il doppio del cateto opposto all'angolo di 30° del triangolo rettangolo.

Applicando il teorema di Pitagora si ha:



$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}l^2 - \frac{1}{4}l^2} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\sqrt{l^2}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$l = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

Terne pitagoriche

Dati tre numeri **interi** a, b e c verificano la relazione $a^2 + b^2 = c^2$, si dice che questi formano una **terna pitagorica**.

Le più "piccole" terne pitagoriche sono (3, 4,5), (5,12,13), (6,8,10), (7,24,25), ma anche (6, 8, 10) e (10, 24, 26) sono terne pitagoriche, ottenute raddoppiando i termini delle prime due terne date.

Terne primitive e terne derivate

Una terna è **primitiva** quando è formata da numeri **primi fra loro**, il loro MCD è quindi 1 ($MCD(3,4,5) = 1$). Esistono solo 16 terne pitagoriche primitive con il numero maggiore minore di 100.

Le terne formato da numeri non primi tra di loro sono dette terne **derivate**.

Le terne come quella formata (3, 4, 5) sono dette terne primitive e quelle come la (6, 8, 10) sono dette derivate.

Esistono delle formule per trovare tutte le terne pitagoriche?

Lo stesso Pitagora riuscì a stabilire la formula per a dispari.

$$a = 2n + 1 \qquad b = 2n^2 + 2n \qquad c = 2n^2 + 2n + 1$$

Platone riuscì a stabilire la formula per b pari.

$$a = 2n \qquad b = n^2 + 1 \qquad c = n^2 - 1$$

Euclide riporta negli Elementi la formula matematica dalla quale si possono ricavare tutte le terne pitagoriche. Posto che m e n siano due numeri interi arbitrari qualsiasi, con $m > n$.

$$a = 2mn \qquad b = m^2 - n^2 \qquad c = m^2 + n^2$$

Una conseguenza di questa formula è che le terne pitagoriche sono infinite, poiché sono infinite le possibili scelte di m e n.

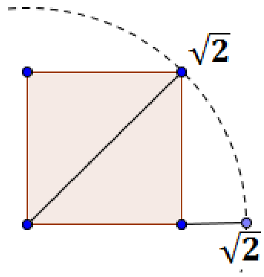
Numeri a cui corrisponde una terna pitagorica: https://oeis.org/A195770

Sequenza delle ipotenuse somme di due quadrati non nulli: https://oeis.org/A009003

Wolfram MathWorld: http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTriple.html

Numeri irrazionali

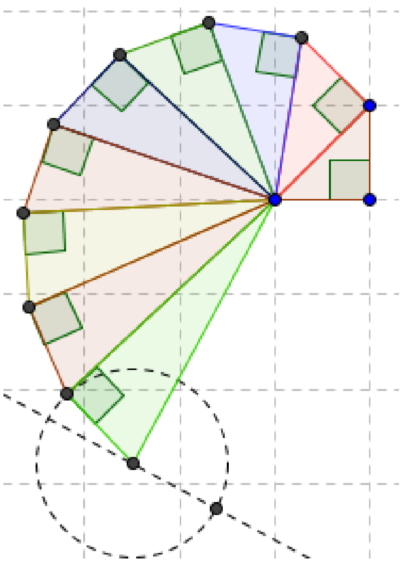
Il teorema di Pitagora portò alla scoperta degli incommensurabili. In un quadrato, infatti, si può applicare il teorema di Pitagora a uno dei triangoli rettangoli isosceli formati dai suoi lati e dalla diagonale. In questo modo si scopre che la diagonale del quadrato e il suo lato sono incommensurabili: la diagonale e lato non hanno alcun sottomultiplo comune.



Prendendo un quadrato di lato unitario è possibile disegnarne la diagonale ma la sua misura ottenuta applicando il teorema di Pitagora ($\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$) non è un numero intero e non è riconducibile a una frazione o al rapporto tra interi, è un numero irrazionale.

L'esistenza di grandezze incommensurabili e conseguentemente dei numeri irrazionali, contraddicendo non solo le convinzioni filosofiche dei pitagorici e mettendo anche in crisi il concetto d'infinito della filosofia greca, fu tenuta segreta. La leggenda vuole che fu Ippaso da Metaponto a divulgare il segreto. *Scrive il filosofo greco Proclo (410-485 d.C.): "I pitagorici narrano che il primo divulgatore di questa teoria [degli irrazionali] fu vittima di un naufragio; e parimenti si riferivano alla credenza secondo la quale tutto ciò che è irrazionale, completamente inesprimibile e informe, ama rimanere nascosto; e se qualche anime si rivolge a un tale aspetto della vita, rendendolo accessibile e manifesto, viene trasportata nel mare delle origini, e ivi flagellata dalle onde senza pace".*

È possibile costruire, utilizzando un'applicazione ripetuta del teorema di Pitagora, la figura detta spirale della radice quadrata, figura che crea le radici quadrate successive di 1, 2, 3, 4, 5 e così via.



Si disegna un triangolo rettangolo isoscele con i cateti lunghi 1 unità e, in successione, gli altri triangoli rettangoli aventi ciascuno il cateto minore lungo sempre 1 unità e il cateto maggiore coincidente con l'ipotenusa del triangolo precedente.

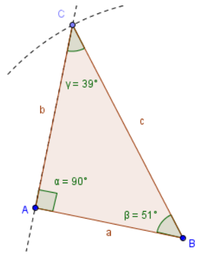
In questo modo l'ipotenusa del primo triangolo misura $\sqrt{2}$, l'ipotenusa del secondo triangolo misura $\sqrt{3}$, del terzo $\sqrt{4}$, del quarto $\sqrt{5}$ e così via.

Classificazione dei triangoli in base agli angoli

Un **triangolo** è **rettangolo** se il quadrato del lato maggiore è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati.

In un triangolo ottusangolo

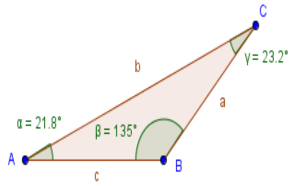
$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2$



Un **triangolo ottusangolo** ha un angolo interno maggiore di 90° (angolo ottuso).

In un triangolo ottusangolo

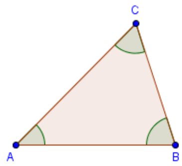
$a^2 + b^2 < c^2 \rightarrow c^2 > a^2 + b^2$



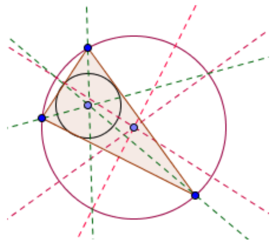
Un **triangolo acutangolo** ha tutti gli angoli interni minori di 90° (angoli acuti).

In un triangolo ottusangolo

$a^2 + b^2 > c^2 \rightarrow c^2 < a^2 + b^2$



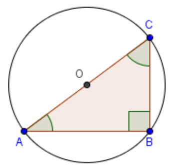
Condizioni di inscrittibilità per i triangoli



Un poligono è inscrittibile in una circonferenza se gli assi dei suoi lati s'incontrano in un unico punto, detto circocentro del poligono.

Un triangolo è sempre inscrittibile in una circonferenza, esistendo per tutti i triangoli, il circocentro.

In un triangolo rettangolo in centro del cerchio circoscritto cade a metà dell'ipotenusa. Pertanto se un triangolo è inscritto in un cerchio e uno dei suoi lati è il diametro del cerchio, allora il triangolo è rettangolo.



$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

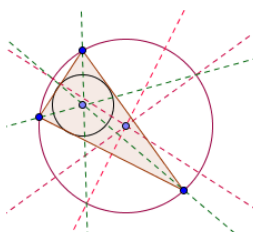
$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$$raggio\ cerchio\ inscritto = r = \frac{A}{p}$$

Dove sono a, b, c sono le misure dei lati del triangolo e A è l'area del triangolo.

NB Si riprova anche la forma p oppure P per indicare il perimetro e, quindi, $\frac{p}{2}$ *il semiperimetro*

Condizioni di circoscrittibilità per i triangoli



Un poligono è circoscrittibile in una circonferenza se le bisettrici dei suoi angoli s'incontrano in un unico punto, detto incentro del poligono.

Un triangolo è sempre circoscrivibile a una circonferenza, esistendo per tutti i triangoli, l'incentro.

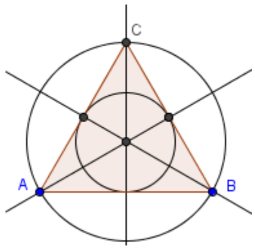
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$$raggio\ cerchio\ circoscritto = r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A}$$

Dove sono a, b, c sono le misure dei lati del triangolo e A è l'area del triangolo.

Inscrittibilità e circoscrittibilità dei poligoni regolari



In un poligono regolare circocentro e incentro coincidono. Ogni poligono regolare, pertanto, ammette una circonferenza inscritta e circoscritta.

Il raggio della circonferenza inscritta è detto **apotema** del poligono e rappresenta la distanza di ogni lato dal centro.

In un triangolo equilatero, il raggio della circonferenza inscritta (apotema) è la terza parte dell'altezza del triangolo.

In un triangolo equilatero il raggio della circonferenza circoscritta è il doppio del raggio circonferenza inscritta (due terzi dell'altezza del triangolo).

$$a = r_{insc.} = \frac{1}{3}h \qquad r_{circosc.} = 2r_{insc.} = \frac{2}{3}h \qquad h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \qquad S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Numero fisso per il triangolo equilatero

In un poligono regolare il rapporto tra l'apotema e il lato è un valore costante detto numero fisso (f) caratteristico di ogni tipo poligono regolare.

$$f = \frac{a}{l} = 0{,}28867$$

$$\boldsymbol{S = p \cdot a}$$

$$S = \frac{n \cdot l}{2} \cdot l \cdot f = l^2 \cdot \frac{n \cdot f}{2} \qquad a = \frac{S}{p} \qquad p = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{a}}$$

L'area di un poligono regolare è data dal prodotto del semiperimetro per l'apotema.