Figure piane equivalenti

Due figure piane sono **equivalenti** o equiestese quando hanno la stessa superficie.

Se due figure sono uguali allora sono anche equivalenti.

$A = B \rightarrow A \equiv B$

Non necessariamente due figure equivalenti sono, infatti, uguali. Il termine uguale ed equivalente vanno in geometria tenuti distinti.

Due figure sono scomponibili in parti a due a due uguali si dice che sono equiscomponibili.

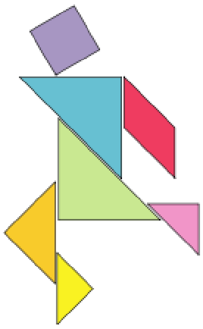
Teorema di Bolyai-Gerwien (Wallace-Bolyai-Gerwien)

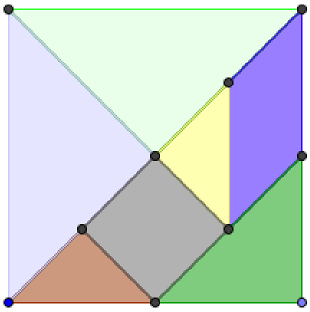
Due poligoni aventi la stessa area sono equiscomponibili, ossia possono essere suddivisi in un numero finito di parti a due a due congruenti.

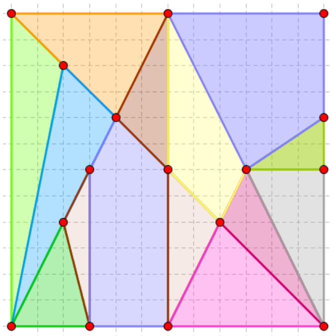
Figure equiscomponibili sono equivalenti.

Se due poligoni sono equivalenti allora esiste una scomposizione di entrambi tale da ottenere coppie di poligoni a due a due uguali.

Ne sono un esempio il gioco del Tangram (it.wikipedia.org/wiki/Tangram) e lo Stomachion (it.wikipedia.org/wiki/Stomachion).







Il terzo dei 23 problemi proposti da David Hilbert (Königsberg, 23 gennaio 1862 – Gottinga, 14 febbraio 1943), in un convegno a Parigi nell'agosto del 1900, riguarda la generalizzazione del teorema di Bolyai-Gerwien da dimensione 2 in dimensione 3.
"*Due solidi di uguale volume possono essere decomposti in solidi più piccoli congruenti a coppie?*"
La risposta in dimensione 3 è negativa e la dimostrazione è attribuita a Max Dehn (Amburgo, 13 novembre 1878 – Black Mountain, 17 giugno 1952).

Postulati di equivalenza

Superfici congruenti sono equivalenti.

L'equivalenza di superfici piane gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Superfici somma o differenza di superfici uguali sono equivalenti.

Una superficie non può essere equivalente a una sua parte.

Misure di superficie

Dalla necessità di **misurare** le lunghezze, le superfici, volumi e capacità sono nate le prime unità di misura. Tutte le quantità che siano in una qualche modo misurabili sono dette grandezze.

Una grandezza è una proprietà che può essere espressa numericamente tramite una misura.

*Due grandezze sono **omogenee** se sono dello stesso tipo. Tra grandezze omogenee è possibile eseguire confronti e operare con loro.*

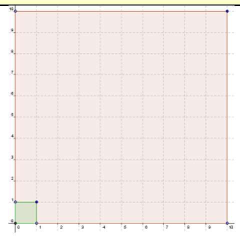
Per misurare una grandezza occorre stabilirne un'altra, omogenea con questa, come riferimento. La grandezza presa come **campione** prende il nome di **unità di misura**. Un'unità di misura è una quantità convenzionale di una grandezza, utilizzata come riferimento per attribuire un valore alla grandezza da misurare.

L'unità di misura delle superfici è il metro quadrato. Il simbolo è [m^2] (33A1 in Unicode).

È per definizione l'area compresa in un quadrato che abbia il lato lungo un metro.

È una grandezza derivata del SI.

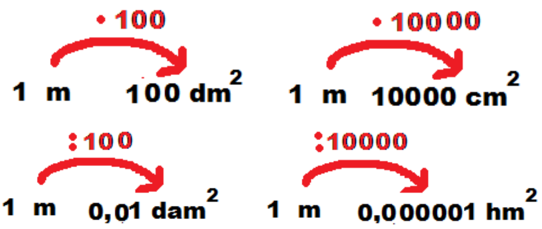
I multipli e i sottomultipli del metro quadrato vanno di 100 in 100 proprio perché sono misure di superficie.



	Unità di misura	*Simbolo*	*Fattore*	*Equivalenza*
multipli	chilometro quadrato	km^2	10^6	1.000.000 m^2
	ettometro quadrato	hm^2	10^4	10.000 m^2
	decametro quadrato	dam^2	10^2	100 m^2
unità	metro quadrato	m^2	10^0	1
Sotto multipli	decimetro quadrato	dm^2	10^{-2}	$(1/10)^2 = 0{,}01\ m^2$
	centimetro quadrato	cm^2	10^{-4}	$(1/100)^2 = 0{,}0001\ m^2$
	millimetro quadrato	mm^2	10^{-6}	$(1/1000)^2 = 0{,}000001\ m^2$

Per trasformare una misura di superficie da un'unità a un'altra unità di cui è multipla, si moltiplica per il fattore 100, 10.000, 1.000.000, …, secondo quante posizioni separano le due unità.

Per trasformare una misura di superficie da un'unità a un'altra unità di cui è sottomultipla, si divide per 100, 10.000, 1.000.000, …, secondo quante posizioni separano le due unità.



Esempi

$2{,}7\ cm^2 \longrightarrow \cdot 100 \longrightarrow 270\ mm^2$ $\qquad 12\ m^2 \longrightarrow \cdot 10.000 \longrightarrow 120.000\ cm^2$

$6\ dam^2 \longrightarrow : 10.000 \longrightarrow 0{,}0006\ km^2$ $\qquad 314\ dm^2 \longrightarrow : 100 \longrightarrow 3{,}14\ m^2$

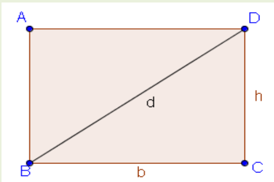
Si parla di concetto intuitivo di estensione di una superficie associando a superfici pesi uguali di superfici dello stesso materiale.

Convenzioni e notazione

- **2p** indica il perimetro (pure utilizzabile **P**)
- **p** indica il semiperimetro (metà perimetro)
- **A** indica l'area

Area di un rettangolo.

L’area di un rettangolo qualsiasi è data dal prodotto delle due dimensioni, usualmente indicate come base e altezza.

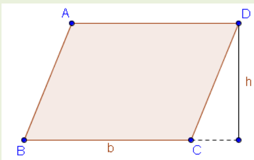
Rettangolo b è la base h è l’altezza d la diagonale Si parla di **dimensioni** senza riferirsi in specifico a base e altezza.	 	$d = \sqrt{b^2 + h^2}$ $b = \sqrt{d^2 - h^2}$ $\qquad h = \sqrt{d^2 - b^2}$
		$2p = 2 \cdot (b + l) = 2 \cdot b + 2 \cdot l$
		$A = b \cdot h$
		$b = \frac{A}{h}$ $\qquad h = \frac{A}{b}$

Area di un parallelogramma.

L’area di un parallelogramma è equivalente a quella di un rettangolo di uguale base e altezza.

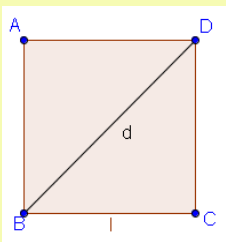
L’area di un parallelogramma qualsiasi è data dal prodotto delle due dimensioni, usualmente indicate come base e altezza.

Per usare una formula tutte le lunghezze devono essere espresse nella stessa unità di misura.

Parallelogramma dove b è la base e h è l’altezza a essa relativa	 	$2p = 2 \cdot (b + h) = 2b + 2h$
		$A = b \cdot h$ $b = \frac{A}{h}$ $\qquad h = \frac{A}{b}$

Area di un quadrato.

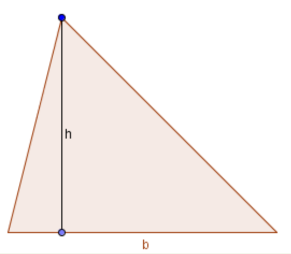
L’area di un quadrato qualsiasi, considerato che la base e l’altezza sono uguali, è data dal quadrato del suo lato.

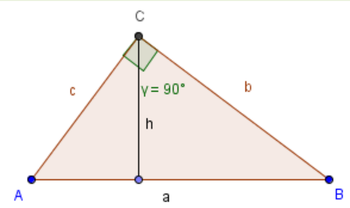
Quadrato dove l è il lato e d la diagonale	 	$d = l\sqrt{2} = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2 \cdot l^2}$ $l = \frac{d}{\sqrt{2}}$
		$2p = 4 \cdot l = 2d\sqrt{2}$
		$A = l \cdot l = l^2 = \frac{1}{2} \cdot d^2$
		$l = \sqrt{A}$

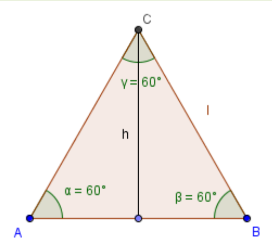
Area di un triangolo.

L'area di un triangolo è equivalente alla metà di un parallelogramma di uguale altezza e base.

Si utilizza, inoltre, la formula di Erone, applicabile quando siano noti i lati di un triangolo qualsiasi e sia possibile calcolarne il semiperimetro p.

Triangolo	 	$2p = a + b + c$
		$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ $b = \frac{2 \cdot A}{h}$ $h = \frac{2 \cdot A}{b}$
		$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ $p\ indica\ il\ semiperimetro$ Formula di Erone

Triangolo rettangolo	 	$A = \frac{a \cdot h}{2}$ $A = \frac{b \cdot c}{2}$
		$h = \frac{b \cdot c}{a}$
		$a = \sqrt{b^2 + c^2}$ $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

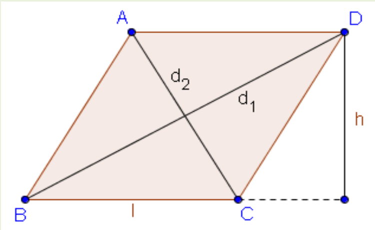
Triangolo equilatero	 	$h = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}$ $l = \frac{2 \cdot h}{\sqrt{3}}$
		$A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$
		$a = \frac{h}{3} = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{6}$

it.wikipedia.org/wiki/Triangolo

Area di un rombo.

L’area di un rombo è equivalente a quella di un rettangolo che ha per dimensioni le due diagonali del rombo.

L’area di un rombo qualsiasi è data dal semiprodotto delle due diagonali.

Rombo dove d_1 è la diagomale maggiore, d_2 è la diagonale minore, h l'altezza e l il lato	 	$l=\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$ $\frac{d_1}{2}=\sqrt{l^2-\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$
		$2p=4\cdot l$
		$A=\frac{d_1\cdot d_2}{2}=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$ $d_1=\frac{2\cdot A}{d_2}$ $d_2=\frac{2\cdot A}{d_1}$

Area di un romboide.

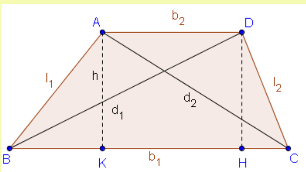
L’area di un romboide è equivalente alla metà di quella di un rettangolo che ha per dimensioni le due diagonali del romboide.
L’area di un romboide qualsiasi è data dal semiprodotto delle due diagonali.

$$A=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$$

Area di un trapezio.

L’area di un trapezio è equivalente a quella di un triangolo che ha per base la somma delle basi e per altezza, l’altezza del trapezio.

L’area di un romboide qualsiasi è data dal prodotto della semisomma delle basi per la sua altezza.

Trapezio dove b_1 è la base maggiore, b_2 è la base minore e h è l’altezza	 	$2p=l_1+b_1+b_2+l_2=2m+l_1+l_2$
		$m=\frac{1}{2}\cdot(b_1+b_2)=\frac{b_1+b_2}{2}$
		$A=\frac{1}{2}h\cdot(b_1+b_2)=\frac{b_1+b_2}{2}\cdot h=m\cdot h$ $b_1+b_2=\frac{2\cdot A}{h}$ $b_1=\frac{2\cdot A}{h}-b_2$

Area di un poligono regolare.

In un poligono regolare, il rapporto tra l'apotema (a) e il lato (l) è un valore costante detto numero fisso (f) caratteristico di ogni tipo poligono regolare.

Esempio

Triangolo equilatero

$$f = \frac{a}{l} = 0{,}28867$$

L'area di un poligono regolare è data dal prodotto del semiperimetro per l'apotema.

Poligoni regolari		$A = p \cdot a = \frac{2p \cdot a}{2}$ $p = \frac{2 \cdot A}{a} \quad a = \frac{A}{p} = \frac{2 \cdot A}{2p}$ $f = \frac{a}{l} \quad \varphi = \frac{A}{l^2}$ $A = \frac{n \cdot l^2 \cdot f}{2} \quad l = \sqrt{\frac{2 \cdot A}{n \cdot f}}$
3 lati	Triangolo	$f = 0{,}289$
4	Quadrato	$f = 0{,}5$
5	Pentagono	$f = 0{,}688$
6	Esagono	$f = 0{,}866$
7	Ettagono	$f = 1{,}038$
8	Ottagono	$f = 1{,}207$
9	Ennagono	$f = 1{,}374$
10	Decagono	$f = 1{,}539$
12	Dodecagono	$f = 1{,}866$
15	Pentadecagono	$f = 2{,}352$