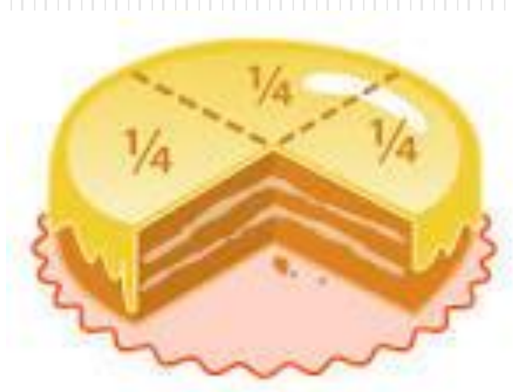
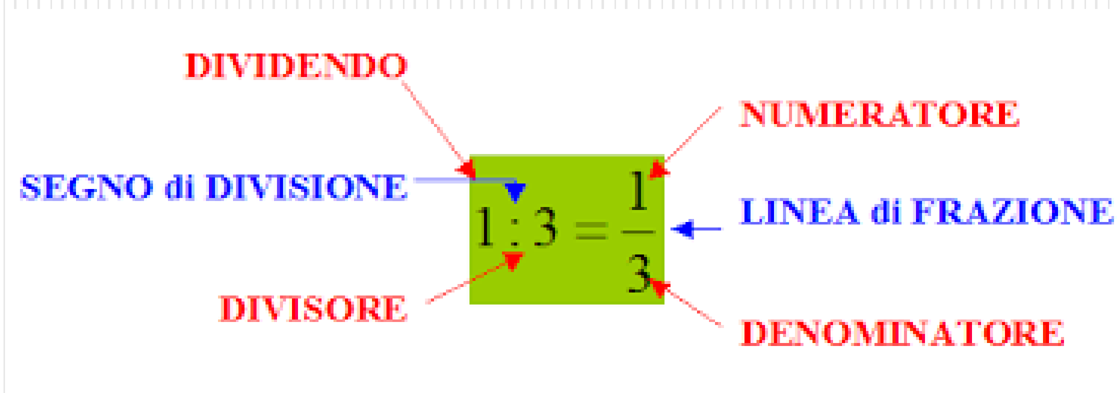
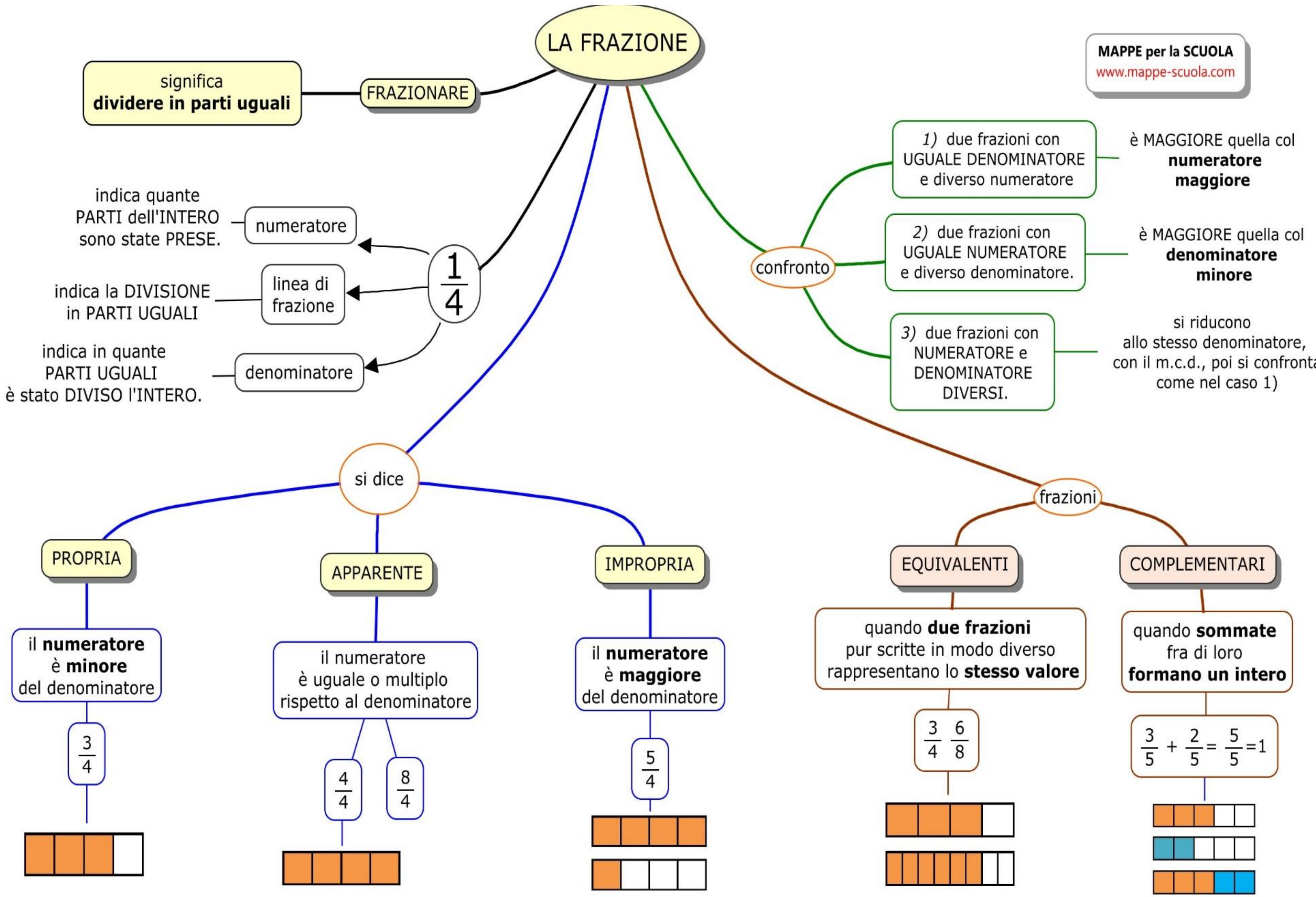
Frazioni e potenze per tutti o quasi

Ti spiego il perché e anche che…





di Ubaldo Pernigo
www.ubimath.org



https://www.mappe-scuola.com/posts/frazioni.php

Cosa significa $\left(\frac{2}{3}\right)^3$?

- *L'elevamento a potenza è un'operazione che associa a due numeri qualsiasi, dati in un dato ordine e detti base e esponente, un terzo numero, detto potenza, che si ottiene moltiplicando la base per se stessa tante volte quando indica l'esponente.*
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}\right)}_{n\ volte}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)}_{3\ volte} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

Ma perché $3^0 = 1$?

Perché corrisponde al quoziente di due numeri uguali.

- $\left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{4} = 1$$

Applicando al proprietà fondamentale della frazioni si perviene allo stesso risultato

$$3^2 : 3^2 = \frac{3^2}{3^2} = \frac{3 \cdot \cancel{3}}{3 \cdot \cancel{3}} = \frac{3}{3} = 1$$

Potenze con esponente 0

Qualsiasi potenza con esponente 0 e base diversa da zero è pari a 1.

$$a^0 = 1 \qquad \forall a \neq 0$$

Esempio

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1; \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1; \left(\frac{2}{1}\right)^0 = 1$$

$$\left(\frac{0}{2}\right)^0 = 0^0 \qquad\qquad non\ ha\ significato$$

$$\left(\frac{2}{0}\right)^0 \qquad\qquad non\ si\ può\ dividere\ per\ 0!$$

Ma perché $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$?

Applicando la definizione:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{3+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$$

Prodotto potenze stessa base -> stessa base e somma esponenti

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1 \cdot 1}{8 \cdot 4} = \frac{1}{32}$$

Ma perché $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$?

Applicando la definizione:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \left[\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\right] : \left[\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\right] : \left[\left(\frac{2}{3}\right)\right] = \left[\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{4-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

Quoziente potenze stessa base -> stessa base e differenza esponenti

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{81} : \frac{4}{9}$$

$$= \frac{16}{81} \cdot \frac{9}{4} = \frac{4}{9}$$

$16:16 = 4$

$81:9 = 9$

Ma perché $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$?

Applicando la definizione:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2 = \left[\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\right]^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{3\cdot 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{2^6}{3^6} = \frac{64}{729}$$

Potenza di potenza -> stessa base e prodotto esponenti

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{8}{27}\right)^2$$

$$= \frac{8}{27}\cdot\frac{8}{27} = \frac{64}{729}$$

...stesso esponente

Prodotto e quoziente di potenze con lo stesso esponente

Il prodotto di potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per base il prodotto delle basi.	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$$\left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3}\right)^3 = \left(\frac{\cancel{3}}{8} \cdot \frac{4}{\cancel{3}}\right)^3 = \left(\frac{4}{8}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Il quoziente di potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per base il quoziente delle basi.	$a^n : b^n = (a : b)^n$

$$\left(\frac{4}{15}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{15} : \frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{4^2}{15} \cdot \frac{3}{\cancel{2}}\right)^3 = \left(\frac{6}{15}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

Ma perché $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$?

Applicando le proprietà delle potenze ho:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} : \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-3}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1}\right)^{1} = 2$$

La regola afferma che le potenze con esponente negativo sono l'inverso della base con lo stesso esponente senza segno

Perché.

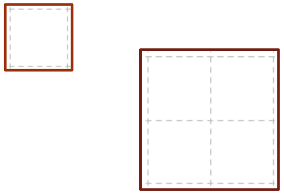
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} : \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Ma perché $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ si dice al quadrato

n^2	potenza	Area quadrato
1^2	1	1
2^2	4	4
	9	9
	16	16
	25	25



Ma perché $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ si dice al cubo

n^3	potenza	Volume cubo
1^3	1	1
2^3	8	8
	27	27
	64	64
	125	125