Metodi risolutivi per i sistemi lineari a confronto

Sistema 1.

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 4x + 2y = 36 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione

Metodo del confronto

Metodo di riduzione

Metodo di Cramer

Metodo grafico

Sistema 2.

$$\begin{cases} 6x + 2y = 3 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione

Metodo del confronto

Metodo di riduzione

Metodo di Cramer

Metodo grafico

Metodo di sostituzione

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 4x + 2y = 36 \end{cases}$$

Si tratta di esprimere una delle due equazioni in funzione di una delle due incognite e di sostituire l'espressione ottenuta nell'altra equazione ottenendo così una equazione in una incognita.

E' il metodo più semplice e generale.

La scelta dell'incognita da isolare è indifferente ma, per comodità di calcolo, si conviene di privilegiare l'equazione più semplice e il termine col coefficiente più semplice.

Dalla prima equazione ottengo

$x + y = 13$

$y = 13 - x$

Per sostituzione nella seconda

$4x + 2y = 36$

$4x + 2(13 - x) = 36$

$4x \mp 26 - 2x = 36$

$2x = 36 - 26$

$x = \frac{10}{2} = 5$

Quindi

$y = 13 - x = 13 - 5 = 8$

Metodo del confronto

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 4x + 2y = 36 \end{cases}$$

Si tratta di esprimere ambedue le equazioni in funzione di una delle due incognite e di uguagliare le due espressioni ottenendo una equazione in una incognita.

<u>Metodo applicabile solo con due equazioni e due incognite.</u>

Dalla prima ottengo

$x + y = 13$

$y = 13 - x$

Dalla seconda ottengo

$4x + 2y = 36$

$y = 18 - 2x$

Posso ora passare al confronto tra

$y = 13 - x$

$y = 18 - 2x$

Da cui

$13 - x = 18 - 2x$

$x = 18 - 13$

$x = 5$

Quindi

$y = 13 - x = 13 - 5 = 8$

Metodo di riduzione

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 4x + 2y = 36 \end{cases}$$

Si tratta di elidere una delle due incognite moltiplicando i termini in modo che i termini di una stessa incognita siano gli stessi. Sottraendo o sommando membro a membro ottenendo una equazione in una incognita.

Si conviene di moltiplicare tutti i termini della prima per 2.

$$2 \cdot x + 2 \cdot y = 2 \cdot 13$$

$$4x + 2y = 36$$

$$2x + 2y = 26$$

$$4x + 2y = 36$$

Sottraendo membro a membro

$$2x = 36 - 26$$

$$x = \frac{10}{2} = 5$$

Sostituisco il valore trovato nella prima equazione

$$x + y = 13$$

$$5 + y = 13$$

$$y = 13 - 5 = 8$$

Metodo di Cramer

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 4x + 2y = 36 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2 - 4 = -2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 36 & 2 \end{vmatrix} = 13 \cdot 2 - 1 \cdot 36 = 26 - 36 = -10$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 4 & 36 \end{vmatrix} = 1 \cdot 36 - 4 \cdot 13 = 36 - 52 = -16$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-16}{-2} = 8$$

Metodo grafico

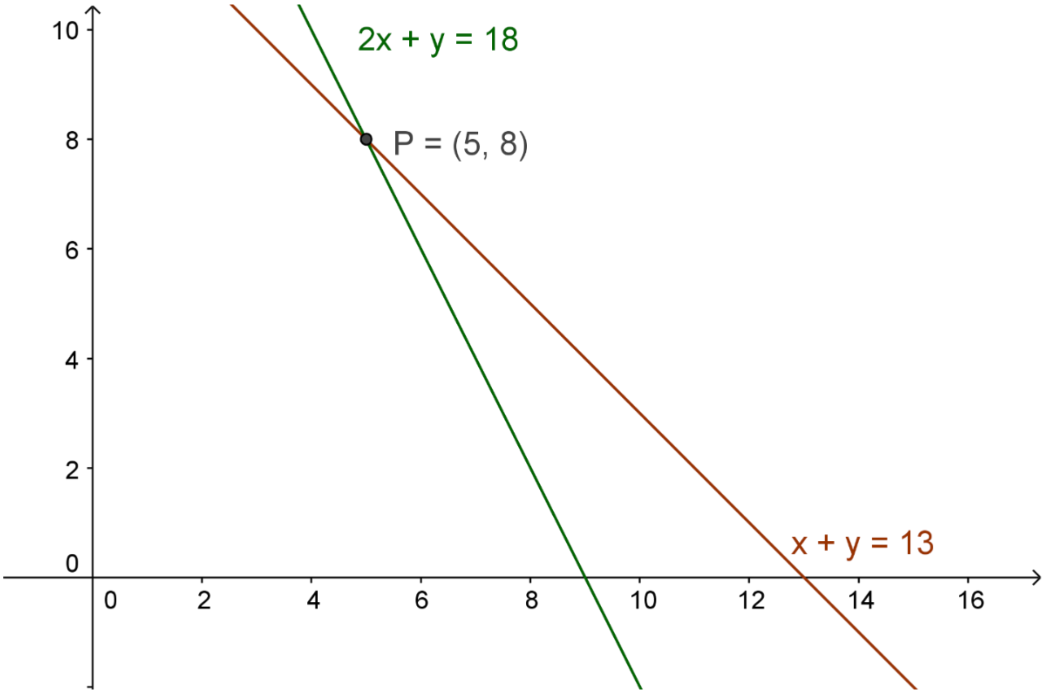
Si tratta di tracciare le rette corrispondenti con l’avvertenza seguente.

Il sistema è indeterminato se ha infinte soluzioni e le rette pertanto coincidono.

Il sistema è impossibile se ha non ha soluzioni e le rette sono pertanto parallele.

Nel nostro caso le rette sono incidenti e il sistema è determinato e le coordinate del punto di incontro sono la soluzione del sistema.

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 4x + 2y = 36 \end{cases}$$



In questo caso le rette sono incidenti e il sistema è, quindi, **determinato**.

$$a_1x + b_1y = c_1 \nparallel a_2x + b_2y = c_2 \quad \rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Se le rette fossero parallele il sistema sarebbe impossibile.

$$a_1x + b_1y = c_1 \parallel a_2x + b_2y = c_2 \quad \rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Se le rette fossero coincidenti il sistema sarebbe indeterminato.

$$a_1x + b_1y = c_1 = a_2x + b_2y = c_2 \quad \rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Metodo di sostituzione

$$\begin{cases} 6x + 2y = 3 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$$

Si tratta di esprimere una delle due equazioni in funzione di una delle due incognite e di sostituire l'espressione ottenuta nell'altra equazione ottenendo così una equazione in una incognita.

E' il metodo più semplice e generale.

La scelta dell'incognita da isolare è indifferente ma, per comodità di calcolo, si conviene di privilegiare l'equazione più semplice e il termine col coefficiente più semplice.

Dalla prima equazione ottengo

$$6x + 2y = 3$$

$$y = \frac{3}{2} - \frac{6}{2}x = \frac{3}{2} - 3x$$

Per sostituzione nella seconda

$$3x - 4y = -1$$

$$3x - 4\left(\frac{3}{2} - 3x\right) = -1$$

$$3x - 6 + 12x = -1$$

$$15x = -1 + 6$$

$$x = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Quindi

$$y = \frac{3}{2} - 3x = \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Metodo del confronto

$$\begin{cases} 6x + 2y = 3 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$$

Si tratta di esprimere ambedue le equazioni in funzione di una delle due incognite e di uguagliare le due espressioni ottenendo una equazione in una incognita.

Metodo applicabile solo con due equazioni e due incognite.

Dalla prima ottengo

$$6x + 2y = 3$$

$$y = \frac{3}{2} - \frac{6}{2}x = \frac{3}{2} - 3x$$

Dalla seconda ottengo

$$3x - 4y = -1$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

Posso ora passare al confronto tra

$$y = \frac{3}{2} - 3x$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

Da cui

$$\frac{3}{2} - 3x = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$6 - 12x = 3x + 1$$

$$-12x - 3x = 1 - 6$$

$$-15x = -5$$

$$15x = 5$$

$$x = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Quindi

$$y = \frac{3}{2} - 3x = \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Metodo di riduzione

$$\begin{cases} 6x + 2y = 3 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$$

Si tratta di elidere una delle due incognite moltiplicando i termini in modo che i termini di una stessa incognita siano gli stessi. Sottraendo o sommando membro a membro ottenendo una equazione in una incognita.

Si conviene di moltiplicare tutti i termini della prima per 2.

$$2 \cdot 6x + 2 \cdot 2y = 2 \cdot 3$$

$$3x - 4y = -1$$

$$12x + 4y = 6$$

$$3x - 4y = -1$$

Sommando membro a membro

$$15x = 5$$

$$x = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Sostituisco il valore trovato nella prima equazione

$$6 \cdot \frac{1}{3} + 2y = 3$$

$$2y = 3 - 2$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Metodo di Cramer

$$\begin{cases} 6x + 2y = 3 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 = -24 - 6 = -30$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 2 \cdot (-1) = -12 + 2 = -10$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 = -6 - 9 = -15$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-10}{-30} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-15}{-30} = \frac{1}{2}$$

Metodo grafico

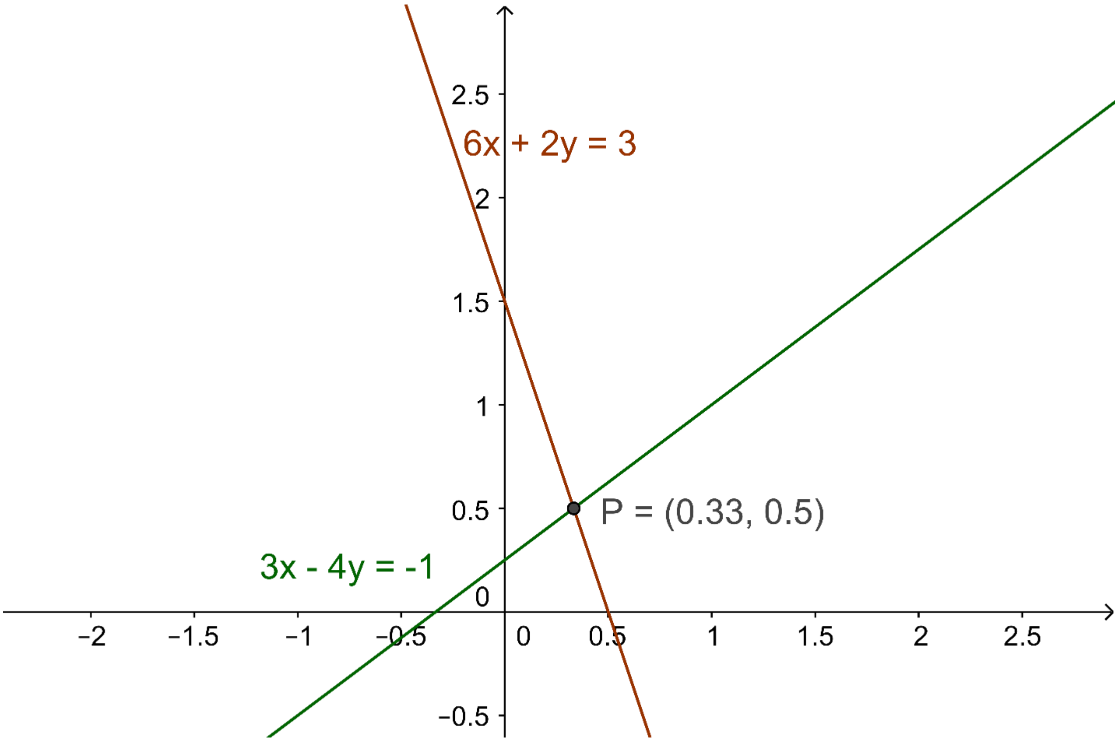
Si tratta di tracciare le rette corrispondenti con l'avvertenza seguente.

Il sistema è indeterminato se ha infinte soluzioni e le rette pertanto coincidono.

Il sistema è impossibile se ha non ha soluzioni e le rette sono pertanto parallele.

Nel nostro caso le rette sono incidenti e il sistema è determinato e le coordinate del punto di incontro sono la soluzione del sistema.

$$\begin{cases} 6x + 2y = 3 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$$



In questo caso le rette sono incidenti e il sistema è, quindi, **determinato**.

$$a_1x + b_1y = c_1 \nparallel a_2x + b_2y = c_2 \quad \rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Se le rette fossero parallele il sistema sarebbe impossibile.

$$a_1x + b_1y = c_1 \parallel a_2x + b_2y = c_2 \quad \rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Se le rette fossero coincidenti il sistema sarebbe indeterminato.

$$a_1x + b_1y = c_1 = a_2x + b_2y = c_2 \quad \rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$