Paradosso del Grand Hotel di Hilbert

Il lavoro sulla teoria degli insiemi e la natura dell'infinito presentato da Georg Cantor (San Pietroburgo, 3 marzo 1845 – Halle, 6 gennaio 1918) non trovò subito il favore dei matematici del tempo. Fu, infatti, il primo a capire che gli insiemi infiniti possono avere diversa grandezza.

Gli venne in soccorso David Hilbert (Königsberg, 23 gennaio 1862 – Gottinga, 14 febbraio 1943), un'autorità per la matematica del tempo, cui si deve il paradosso dell'Hotel Infinity.

Nel paradosso di Hilbert, si fa riferimento a un hotel con infinite camere occupate da infiniti ospiti. L'hotel è completo e sembrerebbe non esservi alcuna camera libera. Hilbert si chiede se sia mai possibile trovare posto per un ulteriore ospite in un hotel che ha la pretesa di chiamarsi Hotel Infinity. Dopo tutto l'infinito numero di ospiti in albergo più un nuovo ospite è ancora un numero infinito di persone. Il paradosso, riferendosi alle camere di un hotel, si riferisce ai soli numeri naturali ($n \in \mathbb{N}$). Non ci sono camere negative e non ci sono frazioni di una camera. Lo stesso vale per gli ospiti.

Vediamo alcuni dei casi trattati da Hilbert.

<u>Un nuovo ospite richiede una stanza.</u>

In questo caso il direttore dell'hotel chiede a tutti gli ospiti di passare una stanza avanti.

$1 \rightarrow 2,\ 2 \rightarrow 3,\ \dots,\ n \rightarrow n+1$

In questo modo qualsiasi numero finito di nuovi ospiti potrà trovare una camera.

Se arrivano nuovi ospiti, può essere chiesto a quelli già presenti chiesto di spostarsi di n camere per farvi posto.

<u>Infiniti nuovi ospiti richiedono una stanza.</u>

Nel secondo scenario, arriva un autobus con infiniti nuovi ospiti. Anche in questo caso si potrebbe procedere come nel caso precedente e accogliere tutti. Un metodo più efficiente suggerito da Hilbert considera la possibilità di spostare ogni ospite dalla sua camera nella camera con numero doppio rispetto a quella attuale.

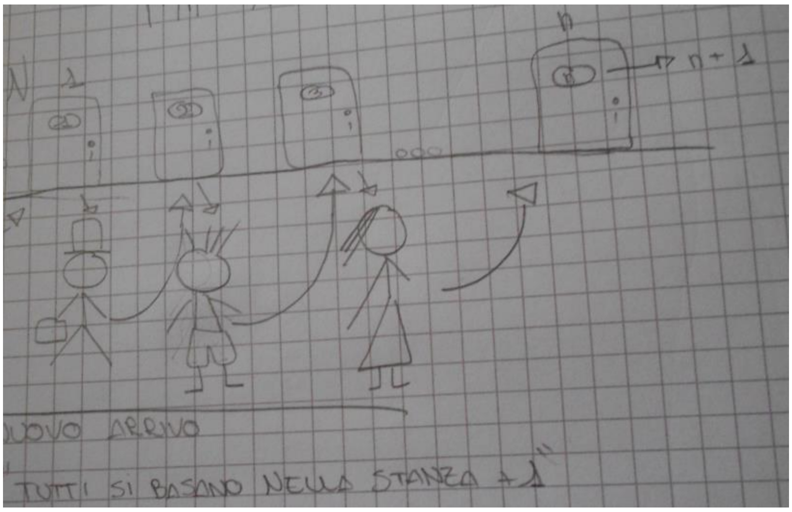
$1 \rightarrow 2,\ 2 \rightarrow 4,\ \dots,\ n \rightarrow 2 \cdot n$

In questo modo si liberano per i nuovi ospiti tutte le camere con numero dispari, pure essi infiniti, risolvendo dunque il problema.

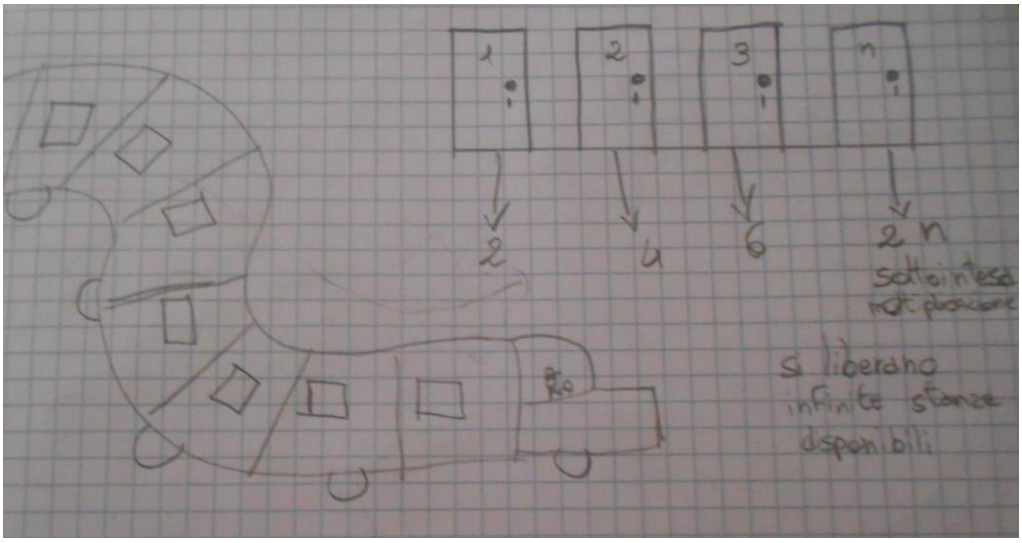
<u>Paradosso.</u>

Questi casi rappresentano un paradosso in quanto, pur non presentando una contraddizione logica, dimostrano un risultato contro-intuitivo che si dimostra essere vero.
Le dichiarazioni "*c'è un ospite per ogni stanza*" e "*non vi è posto per altri ospiti*" non sono equivalenti quando esistono infiniti camere.

>> it.wikipedia.org/wiki/Paradosso_del_Grand_Hotel_di_Hilbert


n
n + 1
UOVO ARRIVO
"TUTTI SI BASANO NELLA STANZA + 1"


N+1
I'M A NEW ONE
NUOVO ARRIVANO TUTTI SI SPOSTANO NELLA STANZA +1


1
2
3
n
2
4
6
2n
sottointesa moltiplicazione
si liberano infinite stanze disponibili