

Proporzionalità diretta e inversa

La proporzionalità trova diverse applicazioni pratiche. Ne sono esempi la percentuale (vista come un rapporto), problemi del tre semplice e composto, problemi di ripartizione semplice, problemi di ripartizione composta e matematica finanziaria (interesse, sconto, ...).

Per tutti questi problemi è fondamentale stabilire, prima di impostare qualsiasi strategia risolutiva, se le grandezze coinvolte sono tra loro direttamente proporzionali o inversamente proporzionali.

Proporzionalità diretta	Proporzionalità inversa
++	+ -
Due grandezze variabili e tra di loro dipendenti sono direttamente proporzionali quando al raddoppiare, triplicare, ecc., di una anche il corrispondente valore dell'altra raddoppia, triplica, ecc.	Due grandezze variabili e tra di loro dipendenti sono inversamente proporzionali quando al raddoppiare, triplicare, ecc., di una, il corrispondente valore dell'altra diventa la metà, un terzo, ecc.
La distanza percorsa, a parità di velocità, è proporzionale al tempo trascorso. In un tempo doppio, mantenendo una velocità costante, percorrerete una distanza doppia, in un tempo triplo percorrete una distanza tripla e così via. Il costo pagato per acquistare dei quaderni, a parità di prezzo unitario, raddoppia se ne comperate il doppio, triplica se ne comperate il triplo e così via.	Data una quantità di vino prefissata, quello disponibile per persona è inversamente proporzionale al numero di persone che siedono al tavolo (più sono le persone meno ne spetterà a ognuno). Il tempo impiegato per compiere un dato lavoro è inversamente proporzionale al numero di operai impiegati (un maggior numero di operai richiede un minore tempo)
Due grandezze variabili e tra di loro dipendenti sono direttamente proporzionali se è <u>costante il rapporto tra due valori</u> corrispondenti, qualunque sia la coppia di valori che si considera.	Due grandezze variabili e tra di loro dipendenti sono inversamente proporzionali se è <u>costante il prodotto di due loro valori</u> corrispondenti, qualunque sia la coppia di valori che si considera.
METODO DI RIDUZIONE ALL'UNITA'	METODO DI CALCOLO DEL TOTALE
Distanza percorsa e tempo impiegato (velocità media) $k = \frac{30}{1} = \frac{60}{2} = \frac{90}{3} = \dots = 30 \text{ km/h}$ Prezzo e quantità acquistata (quaderno da 1,50 euro) $k = \frac{1,50}{1} = \frac{3,00}{2} = \frac{4,50}{3} = \dots = 1,5 \text{ €/quaderno}$	Lavoro in giorni uomo e numero di operai impiegati $k = 16 \cdot 1 = 8 \cdot 2 = 4 \cdot 4 = \dots = 16 \text{ giorni}$ Quantità di vino disponibile per persona (2 litri a disposizione e numero di persone variabile) $k = 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 = 0,5 \cdot 4 = \dots = 2 \text{ litri}$
$k = \frac{y}{x} = \frac{\text{variabile dipendente}}{\text{variabile indipendente}}$ $y = k \cdot x = kx$	$k = x \cdot y = \text{vdipendente} \cdot \text{vindipendente}$ $y = \frac{k}{x}$
La rappresentazione grafica è una <u>semiretta</u> avente l'origine nell'origine degli assi.	La rappresentazione grafica è un ramo di <u>iperbole equilatera</u> .

Costante = valore che non cambia (usualmente indicata con *k costante di proporzionalità*)

Variabile = valore soggetto a cambiare


Variabile indipendente (x) = valore attribuito arbitrariamente

Variabile dipendente (y) = valore non scelto ma determinato dal valore attribuito alla variabile indipendente

<p>Esempio 1.1 <i>Valentina e Giada con l'auto nuova in 4 ore percorrono 120 km. Quale distanza percorrerebbero in 8 ore mantenendo la stessa velocità media?</i></p> <p>Caso proporzionalità diretta (++) <i>k</i> velocità media 120 km : 4 h = 30 km/h</p> $8 \text{ h} \cdot 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 240 \text{ km}$ <p>Conoscendo la velocità media oraria (quanti km si percorrono in un'ora) è immediato calcolare la distanza percorsa in più ore.</p>	<p>Esempio 2.1 <i>Pietro, Giacomo, Romeo e Tommaso sono in grado di portare a termine un lavoro in 4 giorni. Quanto impiegherebbero se fossero in 12?</i></p> <p>Caso proporzionalità inversa (+-) <i>k</i> lavoro da compiere in giorni uomo 6 · 4 = 24 giorni uomo</p> $24 \text{ giorni uomo} : 12 \text{ uomini} = 2 \text{ giorni}$ <p>Conoscendo il totale stimato dei giorni uomo (come lavorasse un solo uomo) necessari a compiere un dato lavoro è immediato calcolare quanto impiegherebbero più uomini a compiere lo stesso lavoro.</p>
<p>Esempio 1.2 <i>Devi preparare il risotto e metti a cuocere 240 per quattro persone. Quanto riso dovresti mettere a cuocere per 6 persone?</i></p> <p>Caso proporzionalità diretta (++) <i>k</i> q.tà di riso per persona 240 g : 4 persone = 60 g per persona</p> $6 \text{ persone} \cdot 60 \frac{\text{grammi}}{\text{persona}} = 360 \text{ g}$	<p>Esempio 2.2 <i>Hai cucinato 80 g di riso per ognuna delle 4 persone inviate. Si presentano però anche altre due persone non attese. Quale sarà il peso della porzione di ognuno?</i></p> <p>Caso proporzionalità inversa (+-) <i>k</i> riso preparato 80 · 4 = 320 g in tutto</p> $\frac{320 \text{ grammi}}{4 + 2} = \frac{320}{6} = \frac{160}{3} \text{ g} \approx 53 \text{ g a persona}$

Play & Video sulle proporzioni

Schooltoon

 Le proporzioni e lo scherzo... <https://youtu.be/tCmKR9V-oNg>

 Esercizi svolti sulle proporz. <https://youtu.be/1NXdT-uyTiI>

 Esercizi sulle percentuali <https://youtu.be/0FknOopr22s>

BB prof


 Le proporzioni https://youtu.be/K0_3W-mdBRY

 Proporzionalità diretta <https://youtu.be/lbnN2V-ybKg>

 Proporzionalità inversa <https://youtu.be/yIN82FWYkl8>

Altre risorse

 Rapporti e proporzioni <https://youtu.be/j5pltNu7EWU>

 Tre semplice <https://youtu.be/iqq4nXrwdfo>

 Proporzionalità <https://youtu.be/dTQYGaTAmQU>

ESEMPIO

Per confezionare 5 scatole regalo si utilizzando $1,5 m^2$ di carta regalo. Calcola quanta carte serve per confezionare 48 scatole analoghe.

Si tratta di proporzionalità **diretta**.

Due grandezze sono direttamente proporzionali se è costante il loro rapporto.

In questo caso, infatti, la carta usate per ogni scatola, dello stesso tipo, è costante.

Metodo della riduzione all'unità

Per confezionare 5 scatole regalo si utilizzando $1,5 m^2$ di carta regalo. Calcola quanta carte serve per confezionare 48 scatole analoghe.

La costante di proporzionalità è la quantità di carta che serve a rivestire un pacco.

Si trova come **rapporto** tra l'area della carta utilizzate e il numero di scatole rivestite.

$$k = m^2 \text{ di carta per scatola} = \frac{1,5 m^2}{5} = 0,3 m^2 / \text{scatola}$$

$$q. \text{tà } (m^2) \text{ carta} = \left(\frac{1,5 m^2}{5} \right) \cdot 48 = 0,3 \cdot 48 = 14,4 m^2$$

Metodo del tre semplice

Per confezionare 5 scatole regalo si utilizzando $1,5 m^2$ di carta regalo. Calcola quanta carte serve per confezionare 48 scatole analoghe.

Si costruisce una tabella con due colonne, una per ogni grandezza e opportunamente intestate (risulta utile riportarvi anche l'unità di misura). Le grandezze vanno espresse nella stessa unità di misura (es. 1,70 cm e 150 cm vanno portate in centimetri o metri). Le colonne devono, quindi, contenere grandezze dello stesso tipo e nella stessa unità di misura.

Le due righe dei dati saranno una completa dei valori noti e una con un valore noto e uno incognito.

Si pongono a lato delle due colonne due frecce che, nel caso di proporzionalità diretta, vanno poste con lo stesso verso.

La proporzione si scrive seguendo l'ordine dettato dal verso delle frecce come segue.

Scatole [numero]	Carta pacchi [m ²]	Proporzionalità DIRETTA
5	1,5 m ²	Si scrive la proporzione seguendo le frecce
48 ↑	x ↑	48 : 5 = x : 1,5
		$x = \frac{48 \cdot 1,5}{5} = 48 \cdot 0,3 = 14,4 m^2$
Diretta: si mettono frecce con lo stesso verso		

Dalla proporzione all'equazione.

Sempre seguendo le frecce abbiamo

$$\frac{x}{1,5} = \frac{48}{5}$$

Secondo principio di equivalenza

$$\frac{x}{1,5} \cdot 1,5 = \frac{48}{5} \cdot 1,5$$

$$x = \frac{48}{5} \cdot 1,5^{0,3}$$

$$x = 48 \cdot 0,3 = 14,4 m^2$$

ESEMPIO

Il Saulo e la Bea non hanno ancora deciso quale scala installare. Un primo progetto ne prevedeva una formata da 27 scalini ognuno dei quali era alto 22 cm. Ma hanno ancora una volta cambiato idea e, per renderla più comoda, riducono l'altezza degli scalini a 18 cm...

Si tratta di proporzionalità **inversa**.

Due grandezze sono inversamente proporzionali se è costante il loro prodotto.

In questo caso il prodotto fornisce la misura in altezza della scala che ovviamente rimane un dato costante ma l'alzata dei gradini ne definisce il numero.

Metodo del calcolo del totale

Il Saulo e la Bea non hanno ancora deciso quale scala installare. Un primo progetto ne prevedeva una formata da 27 scalini ognuno dei quali era alto 22 cm. Ma hanno ancora una volta cambiato idea e, per renderla più comoda, riducono l'altezza degli scalini a 18 cm...

La costante di proporzionalità è l'altezza totale della scala.

Si trova come **prodotto** dell'alzata per il numero di gradini.

$$k = \text{altezza scala} = \text{numero gradini} \cdot \text{alzata} = 27 \cdot 22 \text{ cm} = 594 \text{ cm} = 5,94 \text{ m}$$

$$\text{gradini} = (27 \cdot 22) : 18 = \frac{594}{18} = 33 \text{ gradini}$$

Metodo del tre semplice

Il Saulo e la Bea non hanno ancora deciso quale scala installare. Un primo progetto ne prevedeva una formata da 27 scalini ognuno dei quali era alto 22 cm. Ma hanno ancora una volta cambiato idea e, per renderla più comoda, riducono l'altezza degli scalini a 18 cm. Di quanti scalini sarà formata, se sarà mai fatta, tale scala?

Si costruisce una tabella con due colonne, una per ogni grandezza e opportunamente intestate (risulta utile riportarvi anche l'unità di misura). Le grandezze vanno espresse nella stessa unità di misura (es. 1,70 cm e 150 cm vanno portate in centimetri o metri). Le colonne devono, quindi, contenere grandezze dello stesso tipo e nella stessa unità di misura.

Le due righe dei dati saranno una completa dei valori noti e una con un valore noto e uno incognito.

Si pongono a lato delle due colonne due frecce che, nel caso di proporzionalità inversa, vanno poste una in verso opposto all'altra..

La proporzione si scrive seguendo l'ordine dettato dal verso delle frecce come segue.

scalini	altezza	Proporzionalità INVERSA Si scrive la proporzione seguendo le frecce $x : 27 = 22 : 18$ $x = \frac{27 \cdot 22}{18} = \frac{3 \cdot 22}{2} = 3 \cdot 11 = 33 \text{ gradini}$ Inversa: si mettono frecce con versi opposti
[numero]	[cm]	
27 ↑	22 cm ↓	
x	18 cm	

Dalla proporzione all'equazione.

Sempre seguendo le frecce abbiamo

$$\frac{x}{27} = \frac{22}{18}$$

Secondo principio di equivalenza

$$\frac{x}{27} \cdot 27 = \frac{22}{18} \cdot 27$$

$$x = \frac{22}{18} \cdot 27$$

$$x = 11 \cdot 3 = 33 \text{ gradini}$$

PROVA TU

1.

Alessandro, David, Matteo e Sham, classe 2E 2020, organizzano, durante una mate ora, una festa a casa di Sham. Spendono per questo 60,00 € per cibi e “bevande”. Per mantenere una buona disponibilità di vivande se intendessero far partecipare alla festa anche Thomas, Sofia, Gaia e Mattea quanto dovrebbero spendere?

2.

Un elefante beve circa 150 litri d’acqua al giorno (da 100 a 220 litri). Margherita si chiede di quanta acqua dovrebbe disporre per mantenere in casa per 10 giorni un elefante. Aiutiamola...

3.

Per un banchetto di 120 persone il cuoco, al secolo certo Filippo, con la giacenza disponibile, può fornire agli ospiti porzioni da 80 grammi di pasta. Se dovesse servire, con la stessa quantità di pasta, 125 persone quanto sarebbe il peso di una porzione.

4.

Irina guadagna 180 € in 6 ore. Pietro si chiede quanto mai guadagnerebbe lavorando 8 ore ...

5.

Sofia, l’altra, ha trovato un negozio di nuova apertura che offre, per promuovere il punto vendita, uno sconto del 15 % per una spesa superiore a 15 €. Facendo una spesa di 45 € quanto si verrebbe a pagare alla cassa.

6.

Martina e Pietro, l’altro, per completare il lavoro di arte impiegano in tutto 6 ore. Quanto avrebbero impiegato se fossero stati aiutati da Sham?